Приложение II.

Сакрально-алгебраические структуры Симонова

Перед нами встаёт вопрос, предстоит ли математике когда-нибудь то, что с другими науками происходит с давних пор, не распадётся ли она на отдельные частные науки, представители которых будут едва понимать друг друга и связь между которыми будет поэтому становиться всё меньше. Я не верю в это и не хочу этого. Математическая наука, на мой взгляд, представляет собой неделимое целое, организм, жизнеспособность которого обусловлена связностью его частей.

— Давид Гильберт

На полпути к terra incognita

Обобщённое матричное умножение как эквивалентное представление Теории физических структур

А.А. Симонов

(Горно-Алтайский государственный университет)

В данной работе рассматривается обобщение матричного умножения, когда в отличие от обычного матричного умножения, построенного на билинейной функции

1^0. В данной работе автор изложил подход и основные результаты направления, предложенного в работах [?], [?] В.К. Иониным по поиску решений *физических структур* (далее ФС) на множествах без дополнительной структуры. В действительности, в таком подходе коренным образом менялась и сама постановка задачи. Так, если в подходе Г.Г. Михайличенко фактически искались именно решения ФС на конкретных множествах, то в данном случае задача разбивалась на два этапа. **Первый этап**, это поиск алгебраической структуры, на которых возможно существование решений ФС. **Второй этап**, это уже непосредственно поиск самого решения на найденной алгебраической структуре. Разумеется, наложение некоторых вполне естественных ограничений на решения ФС, при помощи которых хочется избавиться от тривиальных решений, может отсекать и вполне нетривиальные решения, но эти ограничения требуются хотя бы для того, чтобы не утонуть в борьбе с большим количеством мелких проблем. При этом искомые алгебраические структуры, с упомянутой оговоркой, остаются достаточно богатыми. После того как уже найдена сама структура, её можно усиливать, налагая какие либо дополнительные требования. Например, требуя, что бы данная структура была согласована с дифференциальной структурой или с топологической структурой. Но такое усиление, возможно, лучше проводить именно на последнем этапе, т.к. изначальная работа с такой усиленной структурой заставляет отслеживать множество возникающих в обеих структурах проблем. Неисключено, что взаимопроникновение этих двух, именно различных структур, может приводить к каким либо специфическим проблемам. По-видимому, именно по этой причине не удалось пробиться в поиске решений ФС в поле комплексных чисел, ограничившись решениями ФС ранга (2, 2) [?] и (3, 2) [?].

Используя же результаты решений на абстрактных множествах, можно строить представления данных решений на конкретных, интересующих множествах. Такое представление сводится к решению некоторых, уже значительно более простых, функциональных уравнений. Это можно посмотреть на примере ФС ранга (3, 2). Не зная алгебраической структуры, требуется решать функциональное уравнение

$$f(i_1, \alpha_1) = g \begin{pmatrix} & f(i_1, \alpha_2) \\ f(i_2, \alpha_1) & f(i_2, \alpha_2) \\ f(i_3, \alpha_1) & f(i_r, \alpha_2) \end{pmatrix} \tag{1}$$

с двумя неизвестными отображениями

$$f\colon B\times B^2\to B \text{ и } g\colon B^5\to B.$$

Зная же алгебраическую структуру требуется в группе $(\cdot, B_0)$ на множестве без нейтрального элемента $B_0\setminus\{e\}$ решить функциональное уравнение вида

$$\varphi\Big(\varphi(x)\varphi(y)\Big)=\varphi\Big(x\varphi(y^{-1})\Big)y. \tag{2}$$

Если такое решение имеется, то легко можно записать как репрезентатор, так и верификатор. Випишем репрезентаор:

$$f(x,\xi,\eta)=\varphi\Big(x(\xi\eta^{-1})\Big)\eta.$$

Выясняется, что решения ФС на двух множествах как обычные, полученные Г.Г. Михайличенко в его диссертации [?], так и полученные в последнее время полиметрические геометрии [?], [?] связаны с новыми объектами — обобщенными матрицами. В отличае от обычного матричного умножения, построенного на билинейной функции $f(x_1,x_2,\dots,x_r,y_1,y_2,\dots,y_r)=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ry_r$, обобщенное матричное умножение строится на произвольной функции $f(x_1,x_2,\dots,x_r,y_1,\quad y_2,\dots,y_s)$ в которой не обязательно выполнение равенства $r=s$. При этом с обычным матричным произведением их связывает то, что на некотором подмножестве их произведение групповое. Иными словами, среди всех матриц одной размерности можно выделить подмножество матриц на котором такое произведение будет групповым.

Обобщенное матричное умножение может возникать при рассматрении специальных групп преобразований. Например, когда имеется некоторая абстрактная группа G и подмножества $\Omega_{B^r}\subseteq B^r$ и $\Omega_{B^s}\subseteq B^s$ такие, что они образуют две группы преобразований (G,Ω_{B^r}), (G,Ω_{B^s}) с двумя действиями: $x'_r=g\circ_1 x_r$ и $x'_s=g\circ_2 x_s$, где $x_r\in\Omega_{B^r}, x_s\in\Omega_{B^s}$. В группе $(,G)$ где $G\subseteq B^{rs}$, действие $x_r\mapsto g\circ_1 x_r$ можно представить в виде r – уравнений:

$$\begin{cases} f(g_{11},g_{12},\dots,g_{1s},x_1,x_2,\dots,x_r)=x'_1\\ f(g_{21},g_{22},\dots,g_{2s},x_1,x_2,\dots,x_r)=x'_2\\ \qquad\qquad\vdots\\ f(g_{r1},g_{r2},\dots,g_{rs},x_1,x_2,\dots,x_r)=x'_r\end{cases}.$$

Данную систему можно формально переписать в виде умножения матрицы на столбец:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1s}\\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ g_{r1} & g_{r2} & \cdots & g_{rs}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x'_1\\ x'_2\\ \vdots\\ x'_r\end{pmatrix}.$$

Действие $x_s \mapsto g \circ_2 x_s$ можно записать при помощи системы из s уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x_1, x_2, \ldots, x_s, g_{11}, g_{21}, \ldots, g_{r1},) = x'_1 \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_s, g_{12}, g_{22}, \ldots, g_{r2},) = x'_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_s, g_{1s}, g_{2s}, \ldots, g_{rs},) = x'_s \end{array}\right. ,$$

которые так же, формально, можно представить в виде умножения строки на матрицу:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1s} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{r1} & g_{r2} & \cdots & g_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & \ldots & x'_s \end{pmatrix}.$$

Естественно, что такие группы преобразований являются только частью всех групп преобразований и, возможно, будет легче получить их классификацию.

Далее сформулируем аксиомы ФС для абстрактных множеств и покажем как возникает обобщенное матричное умножение. После чего отдельно сформулируем аксиомы для такого матричного умножения и рассмотрим общие следствия.

2^0. Будем говорить, что на множествах $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, B$ действует *физическая структура* (далее ФС) ранга $(r+1, s+1)$, если определены две согласованные функции:
репрезентатор — $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to B$,
и *верификатор* — $g : \Omega_{B^r} \times \Omega_{B^{rs}} \times \Omega_{B^s} \to B$, где $\Omega_{B^r} \times \Omega_{B^{rs}} \times \Omega_{B^s}$ – область определения функции g,
а на подмножествах $\Omega_{\mathfrak{M}^r} \subseteq \mathfrak{M}^r, \Omega_{\mathfrak{N}^s} \subseteq \mathfrak{N}^s, \Omega_{B^{rs}} \subseteq B^{rs}, \Omega_{B^r} \subseteq B^r, \Omega_{B^s} \subseteq B^s$ выполняются следующие аксиомы:

A1 Для произвольных $(r+1)(s+1)$ репрезентаторов $f_{mn} = f(i_m, \alpha_n)$, построенных по любым кортежам $\langle i_0, i_1, \ldots, i_r\rangle \in \mathfrak{M} \times \Omega_{\mathfrak{M}^r}$ и $\langle \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s\rangle \in \mathfrak{N} \times \Omega_{\mathfrak{N}^s}$ существует связь, которую можно записать в виде:

$$f_{00} = g\left(\begin{pmatrix} f_{01} & f_{02} & \ldots & f_{0r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1s} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{r1} & f_{r2} & \cdots & f_{rs} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ \vdots \\ f_{r0} \end{pmatrix}\right).$$

A2 $(\forall \langle i_1, i_2, \ldots, i_r\rangle \in \Omega_{\mathfrak{M}^r})$, $(\forall \langle b_1, b_2, \ldots, b_r\rangle \in \Omega_{B^r})$, $(\exists! \ \ \alpha \in \mathfrak{N})$: $f(i_k, \alpha) = b_k, \quad k \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

Аналогично для второго множества:

A3 $(\forall \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\rangle \in \Omega_{\mathfrak{N}^s})$, $(\forall \langle b_1, b_2, \ldots, b_s\rangle \in \Omega_{B^s})$, $(\exists! \ \ i \in \mathfrak{M})$: $f(i, \alpha_k) = b_k, \quad k \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

По произвольному кортежу $\langle j_1, j_2, \ldots, j_r\rangle \in \Omega_{\mathfrak{M}^r}$ построим отображение $F_{j_1 j_2 \ldots j_r} : \mathfrak{N} \to \Omega_{B^r}$ в виде: $F_{j_1 j_2 \ldots j_r}(\alpha) = \Big(f(j_1, \alpha), f(j_2, \alpha), \ldots, f(j_r, \alpha)\Big)$. Тогда, с учетом аксиомы А2 данное отображение будет биекцией. Аналогично для второго множества по кортежу $\langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s\rangle \in \Omega_{\mathfrak{N}^s}$ построим биективное отображение $F_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_s} : \mathfrak{M} \to \Omega_{B^s}$.

Для удобства записи будем использовать сокращение:
$\alpha^n = f(j_n, \alpha)$, $1 \le n \le r$ и $i^n = f(i, \gamma_n)$, $1 \le n \le s$.

Запишем теперь эквивалентный вид репрезентатора:

$$f(i,\alpha) = f\Big(F^{-1}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_s}(i^1, i^2, \ldots, i^s), F^{-1}_{j_1 j_2 \ldots j_r}(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^r)\Big) =$$

$$= f_{j_1 j_2 \ldots j_r \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_s}(i^1, i^2, \ldots, i^s, \alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^r) \equiv \begin{pmatrix} i^1 & i^2 & \ldots & i^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^r \end{pmatrix}.$$

Итак, при таком эквивалентном переходе элемент $i \in \mathfrak{M}$ переходит в строку из s – элементов $(i^1, \ldots, i^s) \in \Omega_{B^s}$, а элемент $\alpha \in \mathfrak{N}$ переходит в столбец из r – элементов $(\alpha^1, \ldots, \alpha^r) \in \Omega_{B^r}$. Аналогично, при таком эквивалентном переходе кортежи $\langle i_1, i_2, \ldots, i_r\rangle \in \Omega_{\mathfrak{M}^r}$ и $\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\rangle \in \Omega_{\mathfrak{N}^s}$ переходят в матрицы из соответствующих множеств:

$$\begin{pmatrix} i_1^1 & i_1^2 & \cdots & i_1^s \\ i_2^1 & i_2^2 & \cdots & i_2^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_r^1 & i_r^2 & \cdots & i_r^s \end{pmatrix} \in \Omega_{\Omega^r_{B^s}}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_s^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^r & \alpha_2^r & \cdots & \alpha_s^r \end{pmatrix} \in \Omega_{\Omega^s_{B^r}}.$$

Далее будем считать, что справедливо равенство: $\Omega_{\Omega^r_{B^s}} = \Omega_{\Omega^s_{B^r}} = \Omega_{B^{rs}}$. Данное ограничение хотя и носит чисто технический характер, но достаточно сильное и его можно было бы даже сформулировать в виде отдельной аксиомы.

3^0. Введем новые обозначения: $f(j_m, \gamma_n) = \gamma_n^m = j_m^n \equiv e_{mn}$. Матрицу значений $|e_{mn}|$ будем обозначать как E, а репрезентатор записывать в виде:

$$f_E(i^1, i^2, \ldots, i^s, \alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^r) = \begin{pmatrix} i^1 & i^2 & \ldots & i^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^r \end{pmatrix}.$$

Запишем теперь тождества, получающиеся из построения, с учетом новых обозначений:

$$\begin{pmatrix} e_{m1} & e_{m2} & \ldots & e_{mr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^r \end{pmatrix} = \alpha^m, \text{ и } \begin{pmatrix} i^1 & i^2 & \ldots & i^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1m} \\ e_{2m} \\ \vdots \\ e_{sm} \end{pmatrix} = i^m. \qquad (3)$$

Будем рассматривать формально *матрицу* как двумерный набор из $m \times n$ коэффициентов $|f_{mn}|$. Перемножаться могут матрицы при условии, что число столбцов первой матрицы — s, а число строк второй матрицы — r. Итоговая матрица будет рамерности $m{\times}n$ если перемножались матрицы размерности $m{\times}s$ и $r{\times}n$. В качестве произведения двух матриц u_{ms} и v_{rn} будем рассматривать матрицу репрезентаторов, построенных на коэффициентах строки первой матрицы и столбца второй матрицы, т.е. $f_{mn} = f_E(u_{m1}, u_{m2}, \ldots, u_{ms}, v_{1n}, v_{2n}, \ldots, v_{sn})$:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1s} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{ms} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{r1} & v_{r2} & \cdots & v_{rn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}.$$

В частном случае, при перемножении двух матриц рамерности $r \times s$ итоговая матрица будет той же размерности так, что такое *матричное умножение* на множестве $\Omega_{B^{rs}}$ образуют группоид.

Покажем справедливость $(\forall I \in \Omega_{B^{rs}}), (\forall \mathfrak{B} \in \Omega_{B^{rs}}), (\exists! \mathfrak{A} \in \Omega_{B^{rs}}) : I\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. Если рассмотреть аксиому А1, то кортеж $\langle i_1, i_2, \ldots, i_r \rangle \in \Omega_{\mathfrak{M}^r}$ из этого условия есть не что иное как матрица $I \in \Omega_{B^{rs}}$, второй кортеж $\langle b_1, b_2, \ldots, b_r \rangle \in \Omega_{B^r}$ это n – тый столбец матрицы $\mathfrak{B}$. Тогда элемент $\alpha \in \mathfrak{N}$ это n – тый столбец матрицы $\mathfrak{A}$. Последовательно пробегая для n от 1 до s приходим к справедливости доказываемого свойства. Аналогично рассматривается утверждение $(\forall \mathfrak{A} \in \Omega_{B^{rs}}), (\forall \mathfrak{B} \in \Omega_{B^{rs}}), (\exists! I \in \Omega_{B^{rs}}) : I\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, но уже с учетом аксиомы А3. Таким образом приходим к тому, что *матричное умножение* на множестве $\Omega_{B^{rs}}$ образует квазигруппу.

Рассматривая тождества (**??**) для репрезентатора f_E приходим к тому, что матрица E будет как левым, так и правым нейтральным элементом в матричном умножении, следовательно данная квазигруппа будет лупой.

4^0. Перепишем теперь верификатор в виде:

$$f_{00} = \begin{pmatrix} i_0^1 & i_0^2 & \ldots & i_0^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0^1 \\ \alpha_0^2 \\ \vdots \\ \alpha_0^r \end{pmatrix} = g\left(\begin{pmatrix} i_0^1 & i_0^2 & \ldots & i_0^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_s^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^r & \alpha_2^r & \cdots & \alpha_s^r \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} i_1^1 & i_1^2 & \cdots & i_1^s \\ i_2^1 & i_2^2 & \cdots & i_2^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_r^1 & i_r^2 & \cdots & i_r^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_s^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^r & \alpha_2^r & \cdots & \alpha_s^r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_1^1 & i_1^2 & \cdots & i_1^s \\ i_2^1 & i_2^2 & \cdots & i_2^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_r^1 & i_r^2 & \cdots & i_r^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^r \end{pmatrix} \right) =$$

$$g\left(\begin{pmatrix} f_{01} & f_{02} & \ldots & f_{0r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1s} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{r1} & f_{r2} & \cdots & f_{rs} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ \vdots \\ f_{r0} \end{pmatrix} \right).$$

Рассмотрим теперь $r \times s$ верификаторов построенных на двух кортежах $\langle i_1, i_2, \quad \ldots, i_r\rangle, \langle k_1, k_2, \ldots, k_r\rangle$ из множества $\Omega_{\mathfrak{M}^r}$ и двух кортежах $\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s\rangle, \langle \beta_1, \beta_2, \quad \ldots, \beta_s\rangle$ из множества $\Omega_{\mathfrak{N}^s}$. С их помощью можно построить верификатор для матриц: $I\mathfrak{A} = G(I\mathfrak{B}, K\mathfrak{B}, K\mathfrak{A})$, где I, K и $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ это записанные в матричном виде соответствующие кортежи $\langle i_1, i_2, \ldots, i_r\rangle, \langle k_1, k_2, \ldots, k_r\rangle, \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s\rangle, \langle \beta_1, \beta_2, \quad \ldots, \beta_s\rangle$. При этом равенство означает, что равны поэлементно две матрицы. Так элемент из строки m и столбца n с одной стороны это

$$(I\mathfrak{A})_{mn} = f_E(i_m^1, i_m^2, \ldots i_m^s, \alpha_n^1, \alpha_n^2, \ldots, \alpha_n^r),$$

а с другой стороны:

$$\Big(G(I\mathfrak{B}, K\mathfrak{B}, K\mathfrak{A})\Big)_{mn} = g\left(\begin{pmatrix} i_m^1 & i_m^2 & \ldots & i_m^s \end{pmatrix} \mathfrak{B}, K\mathfrak{B}, K \begin{pmatrix} \alpha_n^1 \\ \alpha_n^2 \\ \vdots \\ \alpha_n^r \end{pmatrix} \right).$$

Таким образом приходим, что на множествах $\Omega_{B^{rs}}$, состоящих из $r \times s$ матриц определена ФС ранга $(2,2)$ с репрезентатором определенным как умножение двух матриц из множества $\Omega_{B^{rs}}$ и только что определенным верификатором G.

Покажем теперь что *матричное умножение* представляет собой групповое умножение.

Воспользуемся полученными данными о том, что определенное выше матричное умножение на множестве $\Omega_{B^{rs}}$ является лупой, следовательно, если $X, Y \in \Omega_{B^{rs}} \Rightarrow XY \in \Omega_{B^{rs}}$, а также $E \in \Omega_{B^{rs}}$ и рассмотрим кортежы уже из матриц $\langle X, E\rangle$ и $\langle YZ, Y\rangle$. Построим верификатор:

$$X(YZ) = G(XY, E(YZ), EY) = G(XY, YZ, Y).$$

Рассмотрим теперь кортежи $\langle XY, Y\rangle$, $\langle Z, E\rangle$ для которых также построим верификатор:

$$(XY)Z = G((XY)E, YZ, YE) = G(XY, YZ, Y).$$

Сравнивая правые части равенств приходим к тождеству: $X(YZ) = (XY)Z$, т.о. получили ассоциативность в лупе, следовательно *матричное умножение* на множестве $\Omega_{B^{rs}}$ образует группу.

Рассмотрим обобщение матричного умножения для матриц, построенных над некоторой универсальной алгеброй $\mathfrak{B}$ (далее просто *алгеброй*) и определим минимальное требование на алгебру, для того чтобы такое обобщенное матричное умножение оставалось групповым.

5^0. В качестве произведения двух матриц $A = ||a_{ij}||$ и $B = ||b_{jk}||$ будем рассматривать матрицу $C = ||c_{ik}||$, построенную при помощи функции

$f : \Omega_{\mathfrak{B}^s} \times \Omega_{\mathfrak{B}^r} \to \mathfrak{B}$, где $\Omega_{\mathfrak{B}^s} \subseteq \mathfrak{B}^s$ и $\Omega_{\mathfrak{B}^r} \subseteq \mathfrak{B}^r$. При этом перемножаться могут матрицы размера $(r \times s)$. Под рангом матрицы мы будем понимать ее размер, например, "*ранг матрицы* — $(r \times s)$ ". Если мы рассматриваем матрицу–столбец или матрицу–строку, то, если это не будет приводить к недоразумениям, вместо $(r \times 1)$ или $(1 \times s)$ будем писать (r) или (s) говоря о ранге таких матриц. Элемент c_{ij}, стоящий в i – той строке и j – том столбце есть функция f от s элементов i – той строки матрицы A и r элементов j – того столбца матрицы B:

$$c_{ij} = f(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{is}, b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{rj}).$$

В матрице $A \in \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}$ для обозначения i – той строки будем писать A_{i*}, а для обозначения j – того столбца будем писать A_{*j}. В этих обозначениях можно элемент c_{ij} записать в виде произведения строки на столбец: $c_{ij} = A_{i*}B_{*j}$.

Потребуем что бы в множестве всех матриц размера $(r \times s)$ — $\mathfrak{B}^{rs}$ существовало подмножество матриц $\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}$ для которых данное умножение было групповым. Усиливая данное требование, будем считать, что множество *всех строк* $\left\{A_{i*}\middle| i \in \{1, 2, \ldots, r\}, A \in \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}\right\}$ совпадает с множеством $\Omega_{\mathfrak{B}^s}$, а множество *всех столбцов* $\left\{A_{*j}\middle| j \in \{1, 2, \ldots, s\}, A \in \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}\right\}$ совпадает с множеством $\Omega_{\mathfrak{B}^r}$.

Для множеств $\mathfrak{B}$ и $\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}$ будем считать, что всегда выполняется условие: $(\forall x \in \mathfrak{B}), (\exists A \in \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}) : a_{ij} = x$. Это означает, что для любого элемента x из $\mathfrak{B}$ всегда найдется такая матрица A из множества $\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}$, что её элемент $a_{ij} = x$. Если это не так, тогда всегда можно перейти к подмножеству $\mathfrak{B}_x = \mathfrak{B} \setminus \{x\}$ для которого справедливо $\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}} \subseteq \mathfrak{B}_x^{rs} \subset \mathfrak{B}^{rs}$, на котором и будем работать.

Для произвольной матрицы A можно рассмотреть матрицы $A_{i\updownarrow j}$ и $A_{m\leftrightarrow n}$ отличающиеся от исходной только перестановкой двух строк i и j, или перестановкой двух столбцов m и n соответственно.

Будем говорить, что четверка $\Big(\mathfrak{B}, (r, s), f, \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}\Big)$ задает обобщенное матричное умножение, если выполняются следующие аксиомы[92]:

A1 $(\forall A \in \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}), (\forall C_{*j} \in \Omega_{\mathfrak{B}^r}), (\exists! B_{*j} \in \Omega_{\mathfrak{B}^r}) : AB_{*j} = C_{*j}$.

A2 $(\forall B \in \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}), (\forall C_{i*} \in \Omega_{\mathfrak{B}^s}), (\exists! A_{i*} \in \Omega_{\mathfrak{B}^s}) : A_{i*}B = C_{i*}$.

A3 $(\forall A, B, C \in \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}) : (AB)C = A(BC)$.

A4 $(\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, r\}) : A \in \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}} \Leftrightarrow A_{i\updownarrow j} \in \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}$.

A5 $(\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, s\}) : A \in \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}} \Leftrightarrow A_{i\leftrightarrow j} \in \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}$.

Два обобщенных матричных умножения $\Big(\mathfrak{B}, (r, s), f, \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}\Big)$ и $\Big(\mathfrak{C}, (r, s), g, \Omega_{\mathfrak{C}^{rs}}\Big)$ естественно считать эквивалентными, если существуют такие биекции

[92]Очевидно, что с учетом определения множеств $\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}, \Omega_{\mathfrak{B}^r}, \Omega_{\mathfrak{B}^s}$ из аксиом A1, A2 следуют аксиомы групп $(\forall A, B \in \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}), (\exists! X, Y \in \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}) : AX = B, YA = B$.

$\theta : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$, $\chi : \Omega_{\mathfrak{B}^s} \to \Omega_{\mathfrak{C}^s}$ и $\lambda : \Omega_{\mathfrak{B}^r} \to \Omega_{\mathfrak{C}^r}$ для которых выполняется тождество:

$$\theta\Big(f(x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_r)\Big) = g\Big(\chi(x_1, x_2, \ldots, x_s), \lambda(y_1, y_2, \ldots, y_r)\Big),$$

при этом отображение $\theta^{rs} : \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}} \to \Omega_{\mathfrak{C}^{rs}}$ будет биективным.

6^0. На матричное умножение $\Big(\mathfrak{B}, (r, s), f, \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}\Big)$ можно посмотреть как на умножение двух столбцов $\Big(\mathfrak{B}^s, (r, 1), F, \Omega_{\Omega^r_{\mathfrak{B}^s}}\Big)$, где *элемент* $A_{i*} \in \mathfrak{B}^s$ представлен *строкой*, а умножение

$$AB = \begin{pmatrix} A_{1*} \\ A_{2*} \\ \vdots \\ A_{r*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1*} \\ B_{2*} \\ \vdots \\ B_{r*} \end{pmatrix},$$

построено на функции: $F_s : \Omega_{\mathfrak{B}^s} \times \Omega^r_{\mathfrak{B}^s} \to \Omega_{\mathfrak{B}^s}$, которая связана с функцией $f : \mathfrak{B}^s \times \mathfrak{B}^r \to \mathfrak{B}$ следующим образом: $F_s(A_{i*}, B_{1*}, B_{2*}, \ldots, B_{r*}) = A_{i*}B$.

Аналогично можно рассмотреть и умножение двух строк $\Big(\mathfrak{B}^r, (1, s), F_r, \Omega_{\Omega^s_{\mathfrak{B}^r}}\Big)$, где *элемент* $A_{*i} \in \mathfrak{B}^r$ представлен *столбцом*, с умножением

$$AB = \begin{pmatrix} A_{*1} & A_{*2} & \cdots & A_{*s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{*1} & B_{*2} & \cdots & B_{*s} \end{pmatrix},$$

построенным на функции $F_r : \Omega^s_{\mathfrak{B}^r} \times \Omega_{\mathfrak{B}^r} \to \Omega_{\mathfrak{B}^r}$ такой, что справедливо:

$$F(A_{*1}, A_{*2}, \cdots, A_{*s}, B_{*i}) = AB_{*i}.$$

Для множеств $\Omega_{\Omega^r_{\mathfrak{B}^s}}$, $\Omega_{\Omega^s_{\mathfrak{B}^r}}$ справедливо равенство $\Omega_{\Omega^r_{\mathfrak{B}^s}} = \Omega_{\Omega^s_{\mathfrak{B}^r}} = \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}$.

На примере матрицы–столбца, состоящего из двух строк можно увидеть, что совершенно естественно вводится понятие транспонированной матрицы. Действительно умножение двух столбцов записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1, y_1, y_2) \\ f(x_2, y_1, y_2) \end{pmatrix}.$$

Введем функцию $f^t(y_1, y_2, x_1) = f(x_1, y_1, y_2)$, которая будет определять умножение матриц–строк:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^t(y_1, y_2, x_1) & f^t(y_1, y_2, x_2) \end{pmatrix}.$$

Умножение, очевидно, будет так же групповым, и удовлетворять всем, определенным ранее аксиомам. Для обозначения транспонированной матрицы будем писать

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T.$$

При этом умножения связаны следующим образом:

$$\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right) = \left(\left(\begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array}\right)\right)^T.$$

Данный параграф показывает, что без ограничения общности многие утверждения можно формулировать для матриц – строк или матиц – столбцов.

7^0. Рассмотрим несколько свойств обобщенного матричного умножения, которые имеют место и в обычном матричном умножении.

В силу того, что матричное умножение — групповое, то в нем присутствует нейтральный элемент $E \in \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}$ со свойствами $(\forall A \in \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}) : AE = EA = A$. Запишем матрицу E через ее элементы $E = ||e_{ij}||$, тогда это равенство можно переписать в виде:

$$\begin{array}{l} f(e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{is}, a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{rj}) = E_{i*}A_{*j} = a_{ij}, \\ f(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{is}, e_{1j}, e_{2j}, \ldots, e_{rj}) = A_{i*}E_{*j} = a_{ij}. \end{array} \tag{4}$$

Из первого соотношения видно, что для того что бы из матрицы A получить матрицу с переставленными между собой строками i и j необходимо слева ее умножить на единичную матрицу с переставленными строками i и j — $E_{i\updownarrow j}$. Для перестановки двух столбцов матрицу необходимо умножить справа на матрицу $E_{i\leftrightarrow j}$ с переставленными столбцами:

$$A_{i\updownarrow j} = E_{i\updownarrow j}A \text{ и } B_{i\leftrightarrow j} = BE_{i\leftrightarrow j}. \tag{5}$$

Далее будем рассматривать только матрицы — столбцы, т.к. полученные утверждения легко, с учетом параграфа ^{0}, интерпретировать для матриц — строк и для произвольных матриц. Простейшим следствием из (**??**) является тождество:

$$E_{i\updownarrow j}E_{i\updownarrow j} = E, \tag{6}$$

которое говорит только о том, что если дважды переставить две строки, то все встанет на свои места. Утверждение достаточно очевидное так же как и то, что множество элементов $\{E_{1\updownarrow 2}, E_{1\updownarrow 3}, \ldots, E_{1\updownarrow r}\}$ являются образующими группы перестановок строк. В этом случае перестановку любых двух строк можно записать через образующие:

$$E_{i\updownarrow j} = E_{1\updownarrow i}E_{1\updownarrow j}E_{1\updownarrow i}. \tag{7}$$

В силу того, что $E_{i\updownarrow j} = E_{j\updownarrow i}$, тогда с учетом (**??**) и (**??**) получаем тождество:

$$E_{1\updownarrow i}E_{1\updownarrow j}E_{1\updownarrow i}E_{1\updownarrow j}E_{1\updownarrow i}E_{1\updownarrow j} = E. \tag{8}$$

Рассматриваемые образующие $\{E_{1\updownarrow i}\}$ естественным образом порождают $r-1$ преобразований $\{\phi_i\}$ множества $\Omega_{\mathfrak{B}^s}$ следующим образом:

$$(\forall A_{j*} \in \Omega_{\mathfrak{B}^s}) : \phi_i(A_{j*}) = A_{j*}E_{1\updownarrow i}, \tag{9}$$

которые являются образующими симметрической группы преобразований множества $\Omega_{\mathfrak{B}^s}$ для (**??**) можно записать тождество:

$$\phi_i(E_{1*}) = E_{i*}, \phi_i(E_{i*}) = E_{1*} \text{ и } \phi_i(E_{j*}) = E_{j*} \text{ для всех } j \neq 1, i. \tag{10}$$

Перепишем тождества (**??**) и (**??**) для отображений $\{\phi_i\}$:

$$\phi_i \phi_i = id, (\phi_i \phi_j)^3 = id. \tag{11}$$

8^0. Рассмотрим теперь несколько лемм связанных с эквивалентностью матричного умножения.

Лемма 1 *Если обобщенные матричные умножения* $\left(\mathfrak{B}, (r, s), f, \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}\right)$ *и* $\left(\mathfrak{C}, (r, s), \quad g, \Omega_{\mathfrak{C}^{rs}}\right)$ *эквивалентны тогда соответствующие им группы* $(\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}, \cdot)$ *и* $(\Omega_{\mathfrak{C}^{rs}}, \odot)$ *изоморфны.*

Справедливость этого утверждения вытекает из того, что биекции $\theta : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$, $\chi : \Omega_{\mathfrak{B}^s} \to \Omega_{\mathfrak{C}^s}$ и $\lambda : \Omega_{\mathfrak{B}^r} \to \Omega_{\mathfrak{C}^r}$ порождают биекции θ^{rs}, χ^r, λ^s из множества $\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}$ в множество $\Omega_{\mathfrak{C}^{rs}}$ следующим образом:

$$\theta^{rs}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(x_{11}) & \theta(x_{12}) & \dots & \theta(x_{1s}) \\ \theta(x_{21}) & \theta(x_{22}) & \dots & \theta(x_{2s}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta(x_{r1}) & \theta(x_{r2}) & \dots & \theta(x_{rs}) \end{pmatrix},$$

$$\chi^{r}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1s}) \\ \chi(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2s}) \\ \vdots \\ \chi(x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rs}) \end{pmatrix},$$

$$\lambda^{s}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rs} \end{pmatrix} = \left(\lambda\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{r1} \end{pmatrix} \; \lambda\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{r2} \end{pmatrix} \; \dots \; \lambda\begin{pmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \\ \vdots \\ x_{rs} \end{pmatrix} \right).$$

Приходим к тому, что две группы $(\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}, \cdot)$ и $(\Omega_{\mathfrak{C}^{rs}}, \odot)$ изотопны, следовательно, с учетом второй теоремы Алберта [**?**], они изоморфны.

Верно или нет обратное утверждение пока неизвестно, но если изоморфизм можно записать через матричное произведение $\Psi(X) = A{\cdot}X{\cdot}B$, так что: $\Psi(X)\cdot \Psi(Y) = \Psi(X \odot Y)$, тогда соответствующие функции f и g, определяющие матричное умножение будут эквивалентны. Действительно можно записать:

$$X_{i*} \odot Y_{*j} = \Psi^{-1}(\Psi(X_{i*}) \cdot \Psi(Y_{*j})) = (X_{i*} \cdot B) \cdot (A \cdot Y_{*j}) = X'_{i*} \cdot Y'_{*j}.$$

Таким образом, преобразование $\chi_B : \Omega_{\mathfrak{B}^s} \to \Omega_{\mathfrak{B}^s}$ задается умножением строки на матрицу B, а преобразование $\lambda_A : \Omega_{\mathfrak{B}^r} \to \Omega_{\mathfrak{B}^r}$ задается умножением матрицы A на столбец.

В случае, когда $B = A^{-1}$ мы приходим к автоморфизму и как следствие к тому, что преобразования $\chi_{A^{-1}}, \lambda_A$ задают группу движения для функции f:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1, y_2, \ldots, y_r) = f\Big(\chi_{A^{-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_s), \lambda_A(y_1, y_2, \ldots, y_r)\Big).$$

Рассмотрим еще одну лемму:

Лемма 2 *Матрица–столбец ранга (r) из множества Ω_{B^r} не может содержать совпадающих элементов.*

Из свойства (**??**) следует, что в единичной матрице E не может быть двух совпадающих элементов, так как это приводит к неоднозначности и противоречию. Действительно, пусть, например, $e_m = e_n$, тогда

$$x_m = f(e_m, x_1, x_2, \ldots, x_r) = f(e_n, x_1, x_2, \ldots, x_r) = x_n.$$

Из этого следует, что в подгруппе $(\,, \Omega^{(i)}_{\mathfrak{B}^r})$ среди всех строк в столбце больше не встречается элемента e_i, кроме как в i – той строке, следовательно $(\forall k \in \{1, 2, \ldots i-1, i+1, \ldots, r\}) : e_k \notin \mathfrak{B}_i$.

Если данное утверждение справедливо для произвольного элемента e_i из еденичной матрицы E, тогда это будет справедливо и для произвольной матрицы A, так как мы всегда можем перейти к изоморфной группе $(\cdot, \Omega_{B^r}) \to (\odot, \Omega_{B^r})$ в которой матрица A будет нейтральным элементом.

9^0. Рассмотрим теперь некоторые свойства матриц — столбцов, рассматривая матричные умножения $\Big(\mathfrak{B}, (r, 1), f, \Omega_{\mathfrak{B}^r}\Big)$.

В множестве $\Omega_{\mathfrak{B}^r}$ выделим подмножество матриц для которых i – тая строка совпадает с i – той строкой единичной матрицы E. Для такого подмножества введем специальное обозначение: $\Omega^{(i)}_{\mathfrak{B}^r} = \{A \in \Omega_{\mathfrak{B}^r} | a_i = e_i\}$. Если данное свойство выполнено для нескольких строк $i_1, i_2, \ldots, i_k$, тогда $\Omega^{(i_1, i_2, \ldots, i_k)}_{\mathfrak{B}^r} = \Omega^{(i_1)}_{\mathfrak{B}^r} \bigcap \Omega^{(i_2)}_{\mathfrak{B}^r} \bigcap \ldots \bigcap \Omega^{(i_k)}_{\mathfrak{B}^r}$.

Теорема 1 *На подмножестве $\Omega^{(i_1, i_2, \ldots, i_k)}_{\mathfrak{B}^r}$ естественным образом определена подгруппа $(\Omega^{(i_1, i_2, \ldots, i_k)}_{\mathfrak{B}^r}, \cdot)$ группы $(\Omega_{\mathfrak{B}^r}, \cdot)$.*

Из свойства (**??**), которое в нашем случае можно записать в виде

$$f(e_i, x_1, x_2, \ldots, x_r) = x_i$$

следует, что $(\forall X, Y \in \Omega^{(i)}_{\mathfrak{B}^r})$ их произведение так же будет из этого множества $XY \in \Omega^{(i)}_{\mathfrak{B}^r}$, так как $x_i = y_i = e_i$ откуда, в силу определения множества $\Omega^{(i_1, i_2, \ldots, i_k)}_{\mathfrak{B}^r}$, следует, что если $X, Y \in \Omega^{(i_1, i_2, \ldots, i_k)}_{\mathfrak{B}^r}$, то и их произведение $XY \in \Omega^{(i_1, i_2, \ldots, i_k)}_{\mathfrak{B}^r}$.

Из определения множества $\Omega_{\mathfrak{B}^r}^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}$ следует, что нейтральный элемент $E \in \Omega_{\mathfrak{B}^r}^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}$.

Обратный элемент X^{-1} для произвольного $X \in \Omega_{\mathfrak{B}^r}^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}$ так же должен быть из множества $\Omega_{\mathfrak{B}^r}^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}$. В противном случае, если $X^{-1} \notin \Omega_{\mathfrak{B}^r}^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}$ тогда из условия

(**??**) так же следует, что $XX^{-1} \notin \Omega_{\mathfrak{B}^r}^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}$. Это означает $XX^{-1} \neq E$, что противоречит тому, что $(\Omega_{\mathfrak{B}^r}, \cdot)$ — группа.

Ассоциативность в подгруппе $(\Omega_{\mathfrak{B}^r}^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}, \cdot)$ так же следует из ассоциативности в группе $(\Omega_{\mathfrak{B}^r}, \cdot)$.

Перейдем теперь к рассмотрению произвольных матриц и по аналогии введем обозначение для подмножества $\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}^{(|i)}$ множества матриц $\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}$ если в i – том столбце будет i – тый столбец матрицы E : $\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}^{(|i)} = \{X \in \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}} | X_{*i} = E_{*i}\}$. Аналогичным же образом введем и подмножество:

$$\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}^{(i_1,i_2,\dots,i_k|j_1,j_2,\dots,j_m)} = \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}^{(i_1)} \bigcap \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}^{(i_2)} \bigcap \dots \bigcap \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}^{(i_k)} \bigcap \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}^{(|j_1)} \bigcap \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}^{(|j_2)} \bigcap \dots \bigcap \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}^{(|j_m)}.$$

С учетом параграфа ^{0} и Теоремы **??** следует

Теорема 2 *На подмножестве* $\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}^{(i_1,i_2,\dots,i_k|j_1,j_2,\dots,j_m)}$ *естественным образом определена подгруппа* $(\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}^{(i_1,i_2,\dots,i_k|j_1,j_2,\dots,j_m)}, \cdot)$ *группы* $(\Omega_{\mathfrak{B}^r}, \cdot)$.

Действительно, если на подмножествах $\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}^{(i_1,i_2,\dots,i_k)}$ и $\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}^{(|j_1,j_2,\dots,j_m)}$ определены подгруппы, то и их пересечение так же будет подгруппой.

10^0 . Для простоты записи множества $\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}^{(1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,r|1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,s)}$ будем его обозначать в виде $\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}^{\overline{(i|j)}}$, где черта над скобкой означает, что в левой части скобки имеются все значения от 1 до r за исключением i – того значения, так же как и в правой части скобки имеются все значения от 1 до s за исключением j – того значения.

Вернемся вновь к рассмотрению матрицы–столбца. Для группы, порождаемой подгруппой $(\ , \Omega_{\mathfrak{B}^r}^{\overline{(i)}})$, состоящей только из одной неединичной i – той строки введем специальное обозначение на групповую операцию $(\cdot_i)$ и обозначение на множество в виде $\mathfrak{B}_i$ так, что справедливо:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ e_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ e_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ x_i \cdot_i y_i \\ \vdots \\ e_r \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Omega_{\mathfrak{B}^r}^{\overline{(i)}} = \left\{ \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ e_r \end{pmatrix} \in \Omega_{\mathfrak{B}^r} \middle| x_i \in \mathfrak{B}_i \right\}.$$

Для элемента x в группе $(\cdot_i, \mathfrak{B}_i)$ обратный элемент, когда это будет удобно, будем обозначать $(x)_i^{-1}$ или $E_i(x)$ так, что $x \cdot_i (x)_i^{-1} = x \cdot_i E_i(x) = e_i$. Аналогично при рассмотрении матриц $\Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}$ соответствующие подгруппы $(\ , \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}^{\overline{(i|j)}})$ порождают группы $(\cdot_{ij}, \mathfrak{B}_{ij})$.

Таким образом, приходим к тому, что при помощи определения

$$x \cdot_i y_i = f(x, e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, y_i, e_{i+1} \dots, e_r)$$

задается две операции: групповая $(\cdot_i) : \mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B}_i \to \mathfrak{B}_i$ и частичная $(\cdot_i) : \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}_i \to \mathfrak{B}$. Причем для частичной операции $(\cdot_i, \mathfrak{B})$, для произвольных $e_k \neq e_i$ справедливо $e_k \cdot_i x = e_k$. Оставим обозначение в этих операциях совпадающим, а отличать их будем по используемому множеству.

11^0. В следующих параграфах для того что бы использовать полученный результат, как для матриц–столбцов, так и для произвольных матриц будем иногда рассматривать более общую задачу, когда умножение матриц–столбцов построено не на одной функции f, а на r функциях $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ таких, что $f_i : \Omega_i \times \Omega_{\mathfrak{B}^r} \to \mathfrak{B}$, где $\Omega_i \subseteq \mathfrak{B}$.

Действительно, когда мы рассматриваем подгруппу, построенную на таких $r \times s$ матрицах которые отличаются от единичной только в первом столбце — $(\ , \Omega^{(\ |\overline{1})}_{\mathfrak{B}^{rs}})$, тогда это эквивалентно такой, более общей задаче когда

$$f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_r) = f(x, e_{i2}, , e_{i3}, \dots, e_{is}, y_1, y_2, \dots, y_r).$$

В этом случае $\Omega_i = \mathfrak{B}_{i1}$.

Произведением двух матриц X и Y будет матрица $C = XY$ элементы которой запишутся в виде: $c_i = f_i(x_i, y_1, y_2, \dots, y_n)$. На такие матрицы легко расширяется доказательство теорем **??** и **??**. В этом случае у нас возникает уже не r частичных операций, а r^2:

$$x \circ_{ij} y_j = f_i(x, e_1, e_2, \dots, e_{j-1}, y_j, e_{j+1} \dots, e_r).$$

При этом $x \circ_{ii} y = x \cdot_i y$ и выполняются соотношения: $e_i \circ_{ij} x = e_i$, $x \circ_{ij} e_j = x$ и $(x \circ_{ij} y) \circ_{ij} z = x \circ_{ij} (y \cdot_j z)$, имеется и правый обратный: $(x \circ_{ij} y) \circ_{ij} (y)^{-1}_j = x \circ_{ij} e_j = x$.

12^0. Ответим на вопрос — когда две группы $(\cdot_{ij}, \mathfrak{B}_{ij})$ и $(\cdot_{mn}, \mathfrak{B}_{mn})$, которые возникают в подгруппах, построенных на таких матрицах, которые совпадают с единичной матрицей, за исключением одного элемента, стоящего в $i(m)$ – той строке и $j(n)$ – том столбце — $\Omega^{\overline{(i|j)}}_{\mathfrak{B}^{rs}} (\Omega^{\overline{(m|n)}}_{\mathfrak{B}^{rs}})$, будут изоморфны.

Теорема 3 *Если имеется такой автоморфизм* $\Psi_{ij,mn} : \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}} \to \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}}$ *при котором подмножество* $\Omega^{\overline{(i|j)}}_{\mathfrak{B}^{rs}}$ *отображается в подмножество* $\Omega^{\overline{(m|n)}}_{\mathfrak{B}^{rs}}$, *тогда соответствующие группы* $(\cdot_{ij}, \mathfrak{B}_{ij})$ *и* $(\cdot_{mn}, \mathfrak{B}_{mn})$ *будут изоморфны.*

Автоморфизм $\Psi_{ij,mn}$ порождает изоморфизм $\psi_{ij,mn} : \mathfrak{B}_{ij} \to \mathfrak{B}_{mn}$ такой, что:

$$\Psi_{ij,mn} \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1j} & \dots & e_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{i1} & \dots & x_{ij} & \dots & e_{is} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{r1} & \dots & e_{rj} & \dots & e_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} & \dots & e_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & \dots & \psi_{ij,mn}(x_{ij}) & \dots & e_{ms} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{r1} & \dots & e_{rn} & \dots & e_{rs} \end{pmatrix}.$$

Из определения автоморфизма $(\forall X,Y \in \Omega^{\overline{(i|j)}}_{\mathfrak{B}^{rs}}) : \Psi_{ij,mn}(XY) = \Psi_{ij,mn}(X)\Psi_{ij,mn}(Y)$ следует, что $(\forall x,y \in \mathfrak{B}_{ij}) : \psi_{ij,mn}(x\cdot_{ij}y) = \psi_{ij,mn}(x)\cdot_{mn}\psi_{ij,mn}(y)$.

Как следствие данной теоремы для матриц–столбцов, все её группы $(\cdot_i, \mathfrak{B}_i)$ будут изоморфны, так как имеется автоморфизм $\Psi_{i,m} : X \mapsto E_{i\updownarrow m}XE_{i\updownarrow m}$, удовлетворяющий условию теоремы. Данный автоморфизм, с учетом определения (??) для отображений ϕ_i и выражения (??) порождает изоморфизм $\phi_i\circ\phi_m\circ\phi_i : \mathfrak{B}_i \to \mathfrak{B}_m$. Это легко увидеть на примере матрицы–столбца из двух строк. Автоморфизм:

$$\Psi_{1,2} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}$$

порождает изоморфизм $\phi_2 : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$:

$$\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ e_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \phi_2(x) \end{pmatrix}.$$

В качестве второго примера можно привести множество квадратных матриц $\Omega_{\mathfrak{B}^{rr}}$, таких что их нейтральная матрица E состоит только из двух элементов e_1 и e_2, причем на диагонали стоит один элемент e_1, а все недиагональные элементы равны e_2 (как для обычных матриц 1 и 0). В этом случае все группы $(\cdot_{ij}, \mathfrak{B}_{ij})$ сводятся к двум группам $(\cdot_{11}, \mathfrak{B}_{11})$ и $(\cdot_{12}, \mathfrak{B}_{12})$, все остальные им изоморфны.

Действительно, из построения нейтрального элемента E в группе матриц $(\,, \Omega_{\mathfrak{B}^{rs}})$ следует, что перестановка двух строк i и j так же как и перестановка двух столбцов i и j задается одной и той же матрицей $E_{i\updownarrow j} = E_{i\leftrightarrow j}$. Тогда автоморфизм, задающий перестановку двух диагональных элементов x_{11} и x_{kk} матрицы X запишется в виде: $\Psi_{11,kk} : X \mapsto E_{1\updownarrow k}XE_{1\leftrightarrow k}$. Автоморфизм, задающий перестановку недиагональных элементов x_{12} и x_{ij} матрицы X запишется в виде: $\Psi_{12,ij} : X \mapsto E_{2\updownarrow j}E_{1\updownarrow i}XE_{1\leftrightarrow i}E_{2\leftrightarrow j}$.

13^0. Посмотрим теперь на примере матрицы–столбца с n–строками, какими свойствами обладает изоморфизм ϕ_i и как с его помощью выражается отображение $f : \mathfrak{B}\times\Omega_{\mathfrak{B}^n} \to \mathfrak{B}$.

Рассмотрим сначала более общую задачу из параграфа 11^0, когда умножение матриц построено на n функциях $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ таких, что $f_i : \Omega_i\times\Omega_{\mathfrak{B}^n} \to \mathfrak{B}$. Для этой задачи построим рекуррентную формулу, определяющую вид функций $\{f_i\}$.

Теорема 4 *Если для матриц–столбцов состоящих из n строк с матричным умножением, построенных на n функциях $\{f_i\}$ выполняются аксиомы 1–4 и существуют*

а) матрицы $B_{1i} \in \Omega^{\overline{(1i)}}_{\mathfrak{B}^n}$ со всеми единичными элементами за исключением двух: в первой строке — $b_1(1i)$ и i–той — $b_i(1i)$, *б) биекции* $\omega_{i1} : \Omega_i \setminus \{e_i\} \to \Omega_1 \setminus \{e_1\}$,

для которых справедливо $(\forall y \in \Omega_i \setminus \{e_i\})$ *:* $b_i(1i) \circ_{i1} \omega_{i1}(y) = y$ *, тогда функцию* f_i *, для случая* $y_i \neq e_i$ *можно записать через частичные операции* $(\circ_{k1})$ *и функции* ω_{k1} *и* $\varphi_{i(k1)}(x) = f_i(x, b_1(1k), e_2, e_3, \ldots, e_{k-1}, b_k(1k), e_{k+1}, \ldots, e_n)$ *в рекуррентном виде:*

$$f_i(x, y_1^{(k-1)}, y_2^{(k-1)}, \ldots, y_{n-k}^{(k-1)}, e_{n+1-k}, \ldots, e_n) =$$
$$= \varphi_{i((n+1-k)1)} \Big(f_i(x, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_{n-k}^{(k)}, e_{n+1-k}, \ldots, e_n) \Big) \circ_{i1} \omega_{(n+1-k)1}(y_{n+1-k}^{(k-1)}) \text{ , где}$$
$$y_i^{(k)} = \varphi^{-1}_{i((n+1-k)1)} \Big(y_i^{(k-1)} \circ_{i1} E_1 \circ \omega_{(n+1-k)1}(y_{n+1-k}^{(k-1)}) \Big) \text{ и } y_j^{(0)} = y_j, i \in \{1, 2, \ldots, n-k\}.$$

Рассмотрим матрицы A_{1k} обратные к матрицам B_{1k} и с их помощью построим обратные функции $\varphi^{-1}_{i(k1)}(x) = f_i(x, a_1(1k), e_2, e_3, \ldots, e_{k-1}, a_k(1k), e_{k+1}, \ldots, e_n)$, при этом $\varphi^{-1}_{k(k1)}(b_k(1k)) = e_k$. То, что эти функции будут действительно обратными следует из равенства $XE = XB_{1k}A_{1k} = XA_{1k}B_{1k}$. Из принадлежности $A_{1k}, B_{1k} \in \Omega_{\mathfrak{B}^n}^{\overline{(1k)}}$ следует $\varphi_{k(k1)}(e_i) = \varphi^{-1}_{k(k1)}(e_i) = e_i$ при $i \neq k, 1$.

Введем обозначение для матрицы $C_{m1} \in \Omega_{\mathfrak{B}^n}^{\overline{(1)}}$, которая отличается от единичной матрицы только первым элементом равным $\omega_{m1}(y_m)$, соответственно у обратной матрицы C^{-1}_{m1} первый элемент будет $E_1 \circ \omega_{m1}(y_m)$. Очевидно, что для произвольной матрицы Y справедливо равенство $Y = YC^{-1}_{m1}C_{m1} = YC^{-1}_{m1}A_{1m}B_{1m}C_{m1}$. Распишем теперь покомпонентно данное равенство для случая $m = n$, с учетом свойств частичных операций $(\circ_{ij}, \mathfrak{B})$, рассмотренных в параграфе 11^0 :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ b_n(1n) \circ_{n1} \omega_{n1}(y_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \circ \omega_{n1}(y_n) \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{n1}(y_n) \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 \cdot_1 E_1 \circ \omega_{n1}(y_n) \\ y_2 \circ_{21} E_1 \circ \omega_{n1}(y_n) \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{n1}(y_n) \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 \cdot_1 E_1 \circ \omega_{n1}(y_n) \\ y_2 \circ_{21} E_1 \circ \omega_{n1}(y_n) \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(1n) \\ e_2 \\ \vdots \\ a_n(1n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(1n) \\ e_2 \\ \vdots \\ b_n(1n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{n1}(y_n) \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi^{-1}_{1(n1)}(y_1 \cdot_1 E_1 \circ \omega_{n1}(y_n)) \\ \varphi^{-1}_{2(n1)}(y_2 \circ_{21} E_1 \circ \omega_{n1}(y_n)) \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(1n) \\ e_2 \\ \vdots \\ b_n(1n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{n1}(y_n) \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = Y^{(1)} B_{1n} C_{n1}.$$

Где введено обозначение $Y^{(1)} = YC_{n1}^{-1}A_{1n}$ или построчно:

$$y_i^{(1)} = \varphi_{i(n1)}^{-1}\Big(y_i \circ_{i1} E_1 \circ \omega_{n1}(y_n)\Big).$$

Таким образом при переходе от матрицы Y к $Y^{(1)}$ мы произвели такое преобразование при котором последний элемент стал единичным – e_n. Произведя подобное преобразование далее мы перейдем от $Y^{(1)}$ к $Y^{(2)}$ так, что $Y^{(2)} = Y^{(1)}C_{(n-1)1}^{-1}A_{1(n-1)}$. На k –том шагу придем к $Y^{(k)} = Y^{(k-1)}C_{(n+1-k)1}^{-1}A_{1(n+1-k)}$. Данное равенство при построчной записи будет выглядеть следующим образом:

$$y_i^{(k)} = \varphi_{i((n+1-k)1)}^{-1}\Big(y_i^{(k-1)} \circ_{i1} E_1 \circ \omega_{(n+1-k)1}(y_{n+1-k}^{(k-1)})\Big) \text{ и } y_j^{(0)} = y_j, i \in \{1,2,\ldots,n-k\}.$$

Перейдем теперь к матричному умножению и распишем его покомпонентно:

$$XY = XY^{(1)}B_{1n}C_{n1} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, e_n) \\ f_2(x_2, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, e_n) \\ \vdots \\ f_n(x_n, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(1n) \\ e_2 \\ \vdots \\ b_n(1n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{n1}(y_n) \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_{1(n1)}\Big(f_1(x_1, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, e_n)\Big) \cdot_1 \omega_{n1}(y_n) \\ \varphi_{2(n1)}\Big(f_2(x_2, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, e_n)\Big) \circ_{21} \omega_{n1}(y_n) \\ \vdots \\ \varphi_{n(n1)}\Big(f_n(x_n, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, e_n)\Big) \circ_{n1} \omega_{n1}(y_n) \end{pmatrix}.$$

Таким образом пришли к выражению:

$$f_i(x_i, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \varphi_{i(n1)}\Big(f_i(x_i, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, e_n)\Big) \circ_{i1} \omega_{n1}(y_n).$$

Аналогичным образом, если мы рассмотрим данное умножение после k – того преобразования, когда $Y^{(k)} \in \Omega_{\mathfrak{B}^n}^{(n-k,n+1-k,\ldots,n-1)}$, то получим следующее равенство: $XY^{(k-1)} = XY^{(k)}B_{1(n+1-k)}C_{(n+1-k)1}$, которое при построчной записи будет выглядеть в виде:

$$f_i(x, y_1^{(k-1)}, y_2^{(k-1)}, \ldots, y_{n-k}^{(k-1)}, e_{n+1-k}, \ldots, e_n) =$$
$$= \varphi_{i((n+1-k)1)}\Big(f_i(x, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_{n-k}^{(k)}, e_{n+1-k}, \ldots, e_n)\Big) \circ_{i1} \omega_{(n+1-k)1}(y_{n+1-k}^{(k-1)}).$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема сформулирована в частном виде. Во первых при доказательстве рассматривая последовательность преобразования матрицы $Y \to Y^{(1)} \to Y^{(2)} \to \ldots \to Y^{(n-1)}$ мы рассматривали только случай когда $Y^{(1)} \in \Omega_{\mathfrak{B}^n}^{(n)}, Y^{(2)} \in \Omega_{\mathfrak{B}^n}^{(n,n-1)}, \ldots, Y^{(n-1)} \in \Omega_{\mathfrak{B}^n}^{\overline{(1)}}$, хотя мы можем рассмотреть любую последовательность $Y^{(1)} \in \Omega_{\mathfrak{B}^n}^{(i_n)}, Y^{(2)} \in \Omega_{\mathfrak{B}^n}^{(i_n,i_{n-1})}, \ldots, Y^{(n-1)} \in \Omega_{\mathfrak{B}^n}^{\overline{(i_1)}}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ произвольная перестановка $1, 2, \ldots, n$.

Во вторых, первоначально мы наложили условие: $(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}) : y_i \neq e_i$. С другой стороны если это не так, например, m из n значений совпадает с единичными: $y_i = e_i$ где $i \in \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ тогда, с учетом предыдущего замечания, мы приходим к формуле, полученной в теореме, но с условием, что $Y^{(m)} = Y$, вместо $Y^{(0)} = Y$.

14^0 . В частном случае при $n = 2$ и $f_1 = f_2 = f$, для $B_{12} = E_{2\updownarrow 1}, \omega = id$ приходим к тому, что $\varphi_i = \varphi_i^{-1} = \phi_2$, а функция f , рассматривая последовательность $1, 2$, при условии $y_2 \neq e_2$ запишется в виде:

$$f(x_1, y_1, y_2) = \phi_2\left(x_1 \cdot_1 \phi_2\left(y_1 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 y_2. \tag{12}$$

Рассматривая же обратную последовательность $2, 1$ функцию f , но уже для случая $y_1 \neq e_1$, можно записать и в виде:

$$f(x_1, y_1, y_2) = \phi_2\left(x_1 \cdot_2 \phi_2\left(y_2 \cdot_2 (y_1)_2^{-1}\right)\right) \cdot_2 y_1. \tag{13}$$

Имея запись функции f в виде (**??**) запишем частичную операцию $(\cdot_2)$:

$$x_1 \cdot_2 y_2 = f(x_1, e_1, y_2) = \phi_2\left(x_1 \cdot_1 \phi_2\left((y_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 y_2. \tag{14}$$

С другой стороны обе операции изоморфны, а значит

$$\phi_2(x_1 \cdot_2 y_2) = \phi_2(x_1) \cdot_1 \phi_2(y_2). \tag{15}$$

Следовательно, функция ϕ_2 должна удовлетворять следующему функциональному уравнению:

$$(\forall x \in \mathfrak{B}), (\forall y \in \mathfrak{B} \setminus \{e_2\}) : \phi_2\left(\phi_2(x) \cdot_1 \phi_2(y)\right) = \phi_2\left(x \cdot_1 \phi_2\left((y)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 y. \tag{16}$$

Рассмотрим случай $(x)_1^{-1} = \phi_2\left((y)_1^{-1}\right)$, тогда в правой части равенства (**??**) получим $e_2 \cdot_1 y = e_2$. В этом случае для левой части равенства должно выполняться: $\phi_2(x) = (\phi_2(y))_1^{-1}$. Подставляя одно выражение в другое приходим к тождеству:

$$\phi_2 \circ E_1 \circ \phi_2 \circ E_1 \circ \phi_2 \circ E_1(y) = y, \tag{17}$$

справедливому для произвольного $y \in \mathfrak{B} \setminus \{e_1, e_2\}$. В данном тождестве знаком " $\circ$ " обозначается композиция двух функций.

Воспользуемся теперь тождествами (**??**) и (**??**) что бы показать эквивалентность записи для функции f в виде (**??**) и (**??**). Воспользуемся соотношением (**??**) и перепишем выражение (**??**) с использованием только частичной операции $(\cdot_1)$:

$$\phi_2\left(x_1 \cdot_2 \phi_2\left(y_2 \cdot_2 (y_1)_2^{-1}\right)\right) \cdot_2 y_1 = \phi_2\left(x_1 \cdot_2 \left(\phi_2(y_2) \cdot_1 \phi_2\left((y_1)_2^{-1}\right)\right)\right) \cdot_2 y_1 =$$
$$= \phi_2\left(\phi_2\left(\phi_2(x_1) \cdot_1 \phi_2\left(\phi_2(y_2) \cdot_1 (\phi_2(y_1))_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 \phi_2(y_1)\right),$$

воспользовавшись тождеством (**??**) приходим к выражению

$$\phi_2\left(\phi_2\left(x_1 \cdot_1 \phi_2\left(\phi_2(y_1) \cdot_1 (\phi_2(y_2))_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 \phi_2(y_2) \cdot_1 (\phi_2(y_1))_1^{-1} \cdot_1 \phi_2(y_1)\right) =$$

$$\phi_2\left(\phi_2\left(x_1\cdot_1\phi_2\left(\phi_2(y_1)\cdot_1\left(\phi_2(y_2)\right)_1^{-1}\right)\right)\cdot_1\phi_2(y_2)\right).$$

Воспользуемся дважды тождеством (**??**), перейдя при этом, для удобства, к другой записи для обратного элемента:

$$\phi_2\left(x\cdot_1\phi_2\Big(\phi_2(y_1)\cdot_1 E\circ\phi_2(y_2)\Big)\cdot_1\phi_2\circ E_1(y_2)\right)\cdot_1 y_2 =$$

$$\phi_2\left(x_1\cdot_1\phi_2\Big(y_1\cdot_1\phi_2\circ E_1\circ\phi_2\circ E_1\circ\phi_2(y_2)\Big)\cdot_1\phi_2\circ E_1\circ\phi_2(y_2)\cdot_1\phi_2\circ E_1(y_2)\right)\cdot_1 y_2.$$

Переписав данное выражение с учетом тождества (**??**) получим искомое выражение (**??**).

15^0. Покажем теперь, что если на множестве $\mathfrak{B}$ с частичной операцией $(\cdot_1,\mathfrak{B})$ определена функция ϕ для которой справедливо тождество (**??**), тогда на этом множестве функция $f:\mathfrak{B}\times\Omega_{\mathfrak{B}^2}\to\mathfrak{B}$ вида:

$$f(x,y_1,y_2)=\begin{cases}\phi\left(x\cdot_1\phi\left(y_1\cdot_1(y_2)_1^{-1}\right)\right)\cdot_1 y_2 & \text{при } y_2\neq e_2\\ x\cdot_1 y_1 & \text{при } y_2=e_2\end{cases}\tag{18}$$

определяет обобщенное матричное умножение матриц–столбцов из двух строк.

Выполнение Аксиомы 1 означает, что для произвольных $X,Z\in\Omega_{\mathfrak{B}^2}$ существует только одна такая матрица Y для которой справедливо равенство: $XY=Z$. Рассмотрим покомпонентно данное равенство, которое приводит к системе из двух уравнений:

$$\phi\left(x_1\cdot_1\phi\left(y_1\cdot_1(y_2)_1^{-1}\right)\right)\cdot_1 y_2=z_1,$$

$$\phi\left(x_2\cdot_1\phi\left(y_1\cdot_1(y_2)_1^{-1}\right)\right)\cdot_1 y_2=z_2.$$

Из второго уравнения выделим выражение

$$\phi\left(y_1\cdot_1(y_2)_1^{-1}\right)=(x_2)_1^{-1}\cdot_1\phi\left(z_2\cdot_1(y_2)_1^{-1}\right)$$

которое подставим в первое

$$\phi\left(x_1\cdot_1(x_2)_1^{-1}\cdot_1\phi\left(z_2\cdot_1(y_2)_1^{-1}\right)\right)\cdot_1 y_2=$$

$$=\phi\left(\phi\left(x_1\cdot_1(x_2)_1^{-1}\right)\cdot_1 E_1\circ\phi\left(z_2\cdot_1(y_2)_1^{-1}\right)\right)\cdot_1 z_2=z_1.$$

Полученное равенство сначала преобразуем к виду

$$E_1\circ\phi\left(z_1\cdot_1(z_2)_1^{-1}\right)\cdot_1\phi\left(x_1\cdot_1(x_2)_1^{-1}\right)=\phi\left(z_2\cdot_1(y_2)_1^{-1}\right),$$

а затем получим окончательное выражение:

$$y_2=E_1\circ\phi\left(E_1\circ\phi\left(z_1\cdot_1(z_2)_1^{-1}\right)\cdot_1\phi\left(x_1\cdot_1(x_2)_1^{-1}\right)\right)\cdot_1 z_2.$$

Для того что бы получить выражение для y_1 достаточно произвести замену $z_1\leftrightarrow z_2$ и $x_1\leftrightarrow x_2$.

Выполнение Аксиомы 2 достаточно очевидное, так как функцию (**??**) достаточно легко разрешить относительно первого аргумента:

$$x_i = \phi\left(z_i \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right) \cdot_1 E_1 \circ \phi\left(y_1 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right).$$

Для того что бы показать выполнение Аксиомы 3 упростим сначала выражение

$$\phi\left(\phi\left(x \cdot_1 y\right) \cdot_1 E_1 \circ \phi\left(z \cdot_1 y\right)\right),$$

для этого воспользуемся основным свойством функции ϕ — (**??**):

$$\phi\left(\phi\left(x \cdot_1 y\right) \cdot_1 \phi \circ \phi \circ E_1 \circ \phi\left(z \cdot_1 y\right)\right) =$$

$$= \phi\left(x \cdot_1 y \cdot_1 \phi \circ E_1 \circ \phi \circ E_1 \circ \phi\left(z \cdot_1 y\right)\right) \cdot_1 \phi \circ E_1 \circ \phi\left(z \cdot_1 y\right) =$$
$$= \phi\left(x \cdot_1 E_1\left(z\right)\right) \cdot_1 \phi \circ E_1 \circ \phi\left(z \cdot_1 y\right).$$

Таким образом пришли к тождеству:

$$\phi\Big(\phi\left(x \cdot_1 y\right) \cdot_1 E_1 \circ \phi\left(z \cdot_1 y\right)\Big) = \phi\Big(x \cdot_1 E_1\left(z\right)\Big) \cdot_1 \phi \circ E_1 \circ \phi\left(z \cdot_1 y\right). \qquad (19)$$

Рассмотрим теперь выполнение ассоциативности $(XY)Z = X(YZ)$ на примере первой строки. Левую часть равенства можно записать в виде

$$\phi\left(\phi\left(x_1 \cdot_1 \phi\left(y_1 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 y_2 \cdot_1 \phi\left(z_1 \cdot_1 (z_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 z_2.$$

Воспользовавшись равенством $\phi^2 = id$ и тождеством (**??**) приходим к выражению:

$$\phi\left(x_1 \cdot_1 \phi\left(y_1 \cdot_1 (y_2)_1^{-1}\right) \cdot_1 \phi \circ E_1\left(y_2 \cdot_1 \phi\left(z_1 \cdot_1 (z_2)_1^{-1}\right)\right)\right) \cdot_1 \phi\left(y_2 \cdot_1 \phi\left(z_1 \cdot_1 (z_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 z_2 \qquad (20)$$

Рассмотрим теперь первую строку правой части равенства $(XY)Z = X(YZ)$:

$$\phi\left(x_1 \cdot_1 \phi\left(t_1 \cdot_1 (t_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 t_2, \qquad (21)$$

где

$$t_1 = \phi\left(y_1 \cdot_1 \phi\left(z_1 \cdot_1 (z_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 z_2 \quad \text{и} \quad t_2 = \phi\left(y_2 \cdot_1 \phi\left(z_1 \cdot_1 (z_2)_1^{-1}\right)\right) \cdot_1 z_2.$$

Воспользуемся теперь тождеством (**??**) и распишем выражение:

$$\phi\left(t_1 \cdot_1 E_1(t_2)\right) = \phi\left(\phi\Big(y_1 \cdot_1 \phi(z_1 \cdot_1 E_1(z_2))\Big) \cdot_1 E_1\left(\phi\Big(y_2 \cdot_1 \phi(z_1 \cdot_1 E_1(z_2))\Big)\right)\right) =$$

$$= \phi\Big(y_1 \cdot_1 E_1(y_2)\Big) \cdot_1 \phi \circ E_1 \circ \phi\Big(y_2 \cdot_1 \phi(z_1 \cdot_1 E_1(z_2))\Big).$$

Подставляя полученное выражение в (**??**) и замечая, что последнее слагаемое выражения (**??**) совпадает с t_2 приходим к справедливости ассоциативности для первой строки. Так как первая строка ни чем в наших рассуждениях не выделена, приходим к справедливости Аксиомы 3.

Выполнение Аксиомы 4 следует из симметрии построения матричного умножения. Аксиома 5 для матриц–столбцов отсутствует. Таким образом приходим к тому, что на множестве $\mathfrak{B}$ с частичной операцией $(\cdot_1, \mathfrak{B})$ и функцией ϕ удовлетворяющей тождеству (**??**), функция вида (**??**) определяет матричное умножение для матриц–столбцов из двух строк.

16^0. При помощи биекции $L\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_L$, для которой выполняется $\mathfrak{B}_L \subseteq \mathfrak{B}, L(e_2) = e_2$ построим операцию

$$x \oplus y = \begin{cases} \phi(x \cdot_1 E_1 \circ L(y)) \cdot_1 y, & \text{при } y \neq e_2 \\ x, & \text{при } y = e_2 \end{cases}. \tag{22}$$

Очевидно, что данная операция является группоидом с нейтральным элементом — " e_2 ". Действительно, из определения операции (**??**) следует, что " e_2 " является правым нейтральным, с другой стороны, он является и левым нейтральным

$$e_2 \oplus x = \phi(e_2 \cdot_1 E_1 \circ L(x)) \cdot_1 x = \phi(e_2) \cdot_1 x = e_1 \cdot_1 x = x.$$

В данном группоиде биекция L определяет взятие левого обратного

$$L(x) \oplus x = \phi(L(x) \cdot_1 E_1 \circ L(x)) \cdot_1 x = \phi(e_1) \cdot_1 x = e_2 \cdot_1 x = e_2.$$

Покажем теперь, что для операции (**??**) для случая $x \in \mathfrak{B}, y, z \in \mathfrak{B}_{e_2}$ выполняется соотношение обобщающее правостороннюю дистрибутивность

$$(x \oplus y) \cdot_1 z = x \cdot_1 E_1 \circ L(y) \cdot_1 L(y \cdot_1 z) \oplus y \cdot_1 z. \tag{23}$$

Действительно, можно записать

$$(x \oplus y) \cdot_1 z = \phi(x \cdot_1 E_1 \circ L(y)) \cdot_1 y \cdot_1 z = \phi(x \cdot_1 E_1 \circ L(y) \cdot_1 L(y \cdot_1 z) \cdot_1 E_1 \circ L(y \cdot_1 z)) \cdot_1 y \cdot_1 z,$$

откуда следует равенство (**??**).

Легко проверить, что если биекция определена в виде

$$L(x) = \begin{cases} a \cdot_1 x, & \text{при } x \neq e_2 \\ x, & \text{при } x = e_2 \end{cases}, \tag{24}$$

где $a \in \mathfrak{B} \setminus \{e_1, e_2\}$, тогда получается обычная правосторонняя дистрибутивность. Далее будем рассматривать биекцию L только в таком виде.

В группоиде можно определить операцию "вычитания справа"

$$(x \oplus y) \ominus y = x. \tag{25}$$

Рассмотрим сначала случай $y \neq e_2$. Введя обозначение $(x \oplus y) = t$, выразим элемент x через элементы t, y в виде $x = \phi(t \cdot_1 E_1(y)) \cdot_1 L(y)$. Теперь операцию "вычитания справа" можно записать в виде:

$$x \ominus y = \begin{cases} \phi(x \cdot_1 E_1(y)) \cdot_1 L(y), & \text{при } y \neq e_2 \\ x, & \text{при } y = e_2 \end{cases}. \tag{26}$$

Помимо соотношения (**??**), можно записать и соотношение

$$(x \ominus y) \oplus y = x. \tag{27}$$

Действительно, для случая $x = e_2$ и/или $y = e_2$ утверждение тривиальное. Рассмотрим случай, когда $x, y \neq e_2$, тогда

$$(x \ominus y) \oplus y = \phi\Big(\phi(x\cdot_1 E_1(y))\cdot_1 L(y)\cdot_1 E_1 \circ L(y)\Big)\cdot_1 y = x.$$

Операцию "вычитания" можно выразить через аддитивную операцию, действительно для случая $y \neq e_2$ можно записать

$$x \ominus y = \phi(x\cdot_1 E_1(y))\cdot_1 L(y) = x\cdot_1 E_1(y)\cdot_1 L^2(y) \oplus L(y). \tag{28}$$

Рассмотрим теперь выражение (**??**) для частного случая $y = e_1$ и $x = t\cdot_1 L(e_1) = t\cdot_1 a$, откуда следует выражение для функции ϕ :

$$\phi(t) = t\cdot_1 a \oplus e_1. \tag{29}$$

Воспользуемся соотношениями (**??**), (**??**) и запишим функцию (**??**), для случая (**??**) в виде

$$f(x, y_1, y_2) = x\cdot_1 (y_1 \ominus y_2) \oplus y_2. \tag{30}$$

17^0 . Рассмотрим теперь при каких условиях операция $\oplus$ будет групповой.

Лемма 3 *В алгебре* $(\mathfrak{B}, \cdot_1, ^{-1}, \phi, e_1, e_2)$ *для случая* $x, y, z \in \mathfrak{B} \setminus \{e_2\}$ *и* $x \neq L(y), y \neq L(z)$ *следующие три утверждения эквивалентны:*

1) $L(x \oplus y) \oplus x = L(y)$,

2) $L(x) \oplus (x \oplus y) = y$,

3) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

4)

$$L\Big(\phi(x\cdot_1 E_1 \circ L(y))\cdot_1 y\Big)\cdot_1 E_1 \circ L(x) = \phi\Big(L(y)\cdot_1 E_1(x)\Big). \tag{31}$$

Для доказательства леммы воспользуемся выражением (**??**) и покажем, что каждое из первых трех утверждений эквивалентно четвертому.

Используя определение операции $\oplus$ — (**??**) распишем первое равенство, затем умножим справа обе части равенства на $E_1(x)$ и действуя функцией ϕ приходим к соотношению (**??**).

Рассматривая второе равенство сначала распишем его, а потом умножим обе части равенства справа на $E_1\Big(\phi(x\cdot_1 E_1 \circ L(y))\cdot_1 y\Big)$, далее преобразуем правую часть равенства воспользовавшись тождеством (**??**):

$$E_1 \circ \phi(x\cdot_1 E_1 \circ L(y)) = \phi \circ E_1 \circ \phi(L(y)\cdot_1 E_1(x)),$$

действуя теперь на обе части равенства функцией $E_1 \circ \phi$ получим равенство (**??**).

Рассмотрим теперь ассоциативность. Распишем обе части равенства, затем умножим их слева на $E_1(x)$ и подействуем функцией ϕ. Получим новое равенство, правую часть которого преобразуем, воспользовавшись тождеством (**??**) после чего обе части равенства умножим справа на $E_1(y \cdot_1 E_1 \circ L(z))$ и действуя функцией $E_1 \circ \phi$, вновь приходим к соотношению (**??**) после переобозначения $y \to x$ и $z \to y$.

Производя построения в обратную сторону из соотношения (**??**) можно прийти к любым первым трем.

Лемма доказана.

Лемма 4 *Если алгебра* $(\oplus, \mathfrak{B})$ *является полугруппой, тогда она является и группой.*

Действительно, если $(\oplus, \mathfrak{B})$ — полугруппа, тогда можно рассмотреть ассоциативность для тройки $L^2(x), L(x), x$, так что $L^2(x) \oplus (L(x) \oplus x) = (L^2(x) \oplus L(x)) \oplus x$, откуда следует тождество $L^2 = id$, которое означает равенство левого и правого обратных. Следовательно $(\oplus, \mathfrak{B})$ — группа.

Лемма 5 *Если в группе* $(\oplus, \mathfrak{B})$ *элемент* a, *определяющий биекцию (**??**) такой что* $(\forall x \in \mathfrak{B} \setminus \{e_2\})$: $axa = x$, *тогда группа* $(\oplus, \mathfrak{B})$ *будет абелевой.*

Для группы справедливо соотношение:

$$L(x) \oplus (x \oplus y) = y.$$

Распишем левую часть, с учетом определения операции $\oplus$ для случая $x, y \neq e_2$. После умножения справа равенства на элемент $E_1(y)$ перенесем левый сомножитель в правую часть, с учетом равенства $E_1 \circ \phi \circ E_1 = \phi \circ E_1 \circ \phi$ и действия на обе части функцией $E_1 \circ \phi$, приходим к равенству:

$$\phi\Big(\phi(x \cdot_1 E_1(a \cdot_1 y)) \cdot_1 y \cdot_1 E_1(x)\Big) = a \cdot_1 y \cdot_1 E_1(x).$$

Подействуем теперь на обе части функцией ϕ, и, умножая обе части справа на x, получим соотношение:

$$\phi(x \cdot_1 E_1(a \cdot_1 y)) \cdot_1 y = \phi(y \cdot_1 E_1(a \cdot_1 x)) \cdot_1 x,$$

которое, с учетом определения аддитивной операции, можно записать в виде:

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

Очевидно, оно будет справедливо и для случая $x = e_2$ и/или $y = e_2$. Таким образом, пришли к коммутативности групповой операции.

18^0 . Рассмотрим несколько конкретных примеров. Легко проверить, что операции $\oplus$ и $\ominus$ на множестве $\mathfrak{B}$ являются прототипами обычных операций $+$ и $-$, соответственно, когда мы рассматриваем множество вещественных чисел — $\mathbb{R}$. Действительно, в этом случае элементы $e_1 = 1, e_2 = 0, a = -1$, функции $\phi(x) = 1 - x$, $L(x) = -x$, групповая операция умножения $(\cdot_1)$ является обычным умножением, а операция $\oplus$ является обычным сложением. При этом у нас определена не только правая дистрибутивность, но и левая. При этом умножение двух матриц–столбцов построено на функции $f(x, y_1, y_2) = x(y_1 - y_2) + y_2$.

Более интересным примером является алгебра, построенная на парах вещественных чисел — $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, которая является, в некотором смысле, обобщением кольца где определена только правосторонняя дистрибутивность. В этом случае

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

мультипликативная и аддитивная операции определены в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 - x_2)y_1 + x_2 \\ (x_1 - x_2)y_2 + x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix},$$

причем мультипликативная операция является некоммутативной полугруппой и на множестве $\mathfrak{B} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(i, i) | i \in \mathbb{R} \setminus 0\}$ совпадает с частичной операцией $(\cdot_1)$. На подмножестве $\mathfrak{B} \setminus \{e_2\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ определена операция E_1 , операции ϕ и L определены на всем множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$E_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-x_2}{x_1-x_2} \\ \frac{-x_2}{x_1-x_2} \end{pmatrix}, \phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Дистрибутивность можно рассматривать на всем множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, но выполняется только правая дистрибутивность: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}) : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$, левая дистрибутивность не выполняется:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ x_2 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Золотая осень в Академгородке

Литература к Приложению II

[1] *В.К. Ионин.* Абстрактные группы как физические структуры. // Системология и методологические проблемы информационно-логических систем. Новосибирск, 1990. Вып. 135: Вычислительные системы. С. 40 – 43.

[2] *В.К. Ионин.* К определению физических структур. // Труды института математики. Новосибирск, 1992. Том 21.

[3] *А.Г. Курош.* Общая алгебра (лекции 1969/70 учебного года). // МГУ. М., 1970.

[4] *А.А. Литвинцев.* Комплексная физическая структура ранга (2.2). // В кн.: Г.Г. Михайличенко. Математический аппарат теории физических структур. Горно-Алтайск: Универ-Принт ГАГУ, 1997.

[5] *А.А. Литвинцев.* Комплексная физическая структура ранга (3.2). // Материалы XXXV международной научно студенческой конференции, Новосибирск, 1997, с. 62-63.

[6] *Г.Г. Михайличенко.* Двуметрические физические структуры и комплексные числа. // ДАН 1991, том 321, ь4, с. 677 – 680.

[7] *Г.Г. Михайличенко.* Простейшие полиметрические геометрии. // ДАН 1996, том 348, ь1, с. 22 – 24.

[8] *Г.Г. Михайличенко.* Математический аппарат теории физических структур. // Горно-Алтайск: Универ-Принт ГАГУ, 1997.

Зимняя Школа-семинар ТФС-2004
19 – 23 января 2004

Владимир Михайлович САРАНИН,
Геннадий Тимофеевич КОЗЛОВ,
Арно Иванович АРУСТАМЯН,
Геннадий Григорьевич МИХАЙЛИЧЕНКО,
Семён Яковлевич СЕРОВАЙСКИЙ,
Андрей Александрович Берс,
Юрий Иванович КУЛАКОВ,
И.В. ПЛЮСНИН,
Михаил ЕЛФИМОВ, —,
Людмила Сергеевна СЫЧЁВА,
Евгений Васильевич АФОНАСИН