Пример 15. Сакральные потенциалы

1. Два множества состояний $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$.

Каждая механическая или термодинамическая система может находиться в различных состояниях $i, k, \ldots$

В частности, статическое состояние материальной точки, находящейся под действием механической силы, в простейшем случае характеризуется двойным набором обобщённых координат:

тремя декартовыми координатами $x(i), y(i), z(i)$

и тремя проекциями сил $f_x(i), f_y(i), f_z(i)$.

Вместо того, чтобы изображать статическое состояние i механической системы одной точкой в шестимерном пространстве, мы будем говорить, что состояние i описывается своеобразным “диполем”,

$$i = (\overline{i}, \underline{i}) = |i\rangle\langle i|,$$

состоящим из двух **криптоточек** $\overline{i} = |i\rangle$ и $\underline{i} = \langle i|$, каждая из которых характеризуется своим набором координат[80].

Другими словами, каждое состояние системы i мы будем рассматривать как **конец** $|i\rangle$ последовательности предшествующих состояний и **начало** $\langle i|$ новой последовательности:

$$\rule{2cm}{0.4pt}\quad \overbrace{|i\rangle\langle i|}^{i} \quad \underset{w_{\underline{i}\overline{k}}}{\rule{3.5cm}{0.4pt}} \quad \overbrace{|k\rangle\langle k|}^{k} \quad \underset{w_{\underline{k}\overline{m}}}{\rule{3.5cm}{0.4pt}} \quad \overbrace{|m\rangle\langle m|}^{m} \quad \rule{2cm}{0.4pt}$$

Криптоточку $|i\rangle$ мы будем называть правой криптоточкой и приписывать ей координаты, снабжённые верхними индексами $x^1(i), \ldots, x^n(i)$;

криптоточку $\langle i|$ мы будем называть левой криптоточкой и приписывать ей координаты, снабжённые нижними индексами $x_1(i), \ldots, x_n(i)$.

Итак,

$$i = (\overline{i}, \underline{i}) = \begin{cases} |i\rangle \to x^1(i), \ldots, x^n(i) \\ \langle i| \to x_1(i), \ldots, x_n(i) \end{cases}$$

В случае статической механической системы, обладающей потенциальной энергией $U(x, y, z)$ мы будем обозначать декартовы координаты x, y, z одной и той же буквой с индексом вверху, а компоненты силы f_x, f_y, f_z будем обозначать той же самой буквой, но с индексом внизу:

$$x(i), y(i), z(i) \to x^1(i), x^2(i), x^3(i)$$
$$f_x(i), f_y(i), f_z(i) \to x_1(i), x_2(i), x_3(i).$$

Как следует из Теории физических структур, в случае аддитивной физической структуры ранга (5,5) правая криптоточка $\overline{i}$ характеризуется, помимо

---

[80] Вспомним квантовомеханическую систему, состояние которой i описывается двумя различными векторами состояния – бра $\langle i| = \psi^*$ и кет $|i\rangle = \psi$.

трёх верхних координат $x^1(i), x^2(i), x^3(i)$, ещё одним контравариантным скрытым параметром $\overline{s}(i)$, а левая криптоточка $\underline{i}$ характеризуется, помимо трёх нижних координат $x_1(i), x_2(i), x_3(i)$, ещё одним ковариантным скрытым параметром $\underline{s}(i)$, то есть

$$i = (\overline{i}, \underline{i}) = \begin{cases} |i\rangle \to x^1(i), x^2(i), x^3(i); \overline{s}(i) \\ \langle i| \to x_1(i), x_2(i), x_3(i); \underline{s}(i) \end{cases}$$

Отношение между двумя состояниями i и k системы характеризуется репрезентатором $w_{\underline{i}\overline{k}}$, играющим роль расстояния между левой криптоточкой $\underline{i}$ и правой криптоточкой $\overline{k}$.

2. Сакральные потенциалы первого рода

Говорят, что механическая система обладает потенциальной энергией $U(x, y, z)$, если **три** компоненты силы f_x, f_y, f_z следующим образом выражаются через **одну** скалярную функцию трёх переменных:

$$f_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad f_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad f_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{1}$$

Но что скрывается за этой привычной формулировкой? Что такое потенциал и почему он связан с силой таким образом?

За достаточно тривиальным понятием потенциала скрывается нетривиальный факт существования двух дуально сопряжённых скалярных функций $U^0(x^1, \ldots, x^n)$ и $U^1(x_1, \ldots, x_n)$ и двух групп переменных $x^1, \ldots, x^n$ и $x_1, \ldots, x_n$, связанных между собой билинейным многочленом

$$\boxed{U^0(x^1, \ldots, x^n) + x_1 x^1 + \ldots + x_n x^n - U^1(x_1, \ldots, x_n) = 0} \tag{2}$$

В самом деле, дифференцируя равенство (2), получаем:

$$\left(\frac{\partial U^0}{\partial x^\mu} + x_\mu\right) dx^\mu + \left(-\frac{\partial U^1}{\partial x_\mu} + x^\mu\right) dx_\mu = 0 \tag{3}$$

Чтобы равенство (2) имело какой-либо смысл и представляло собой **тождество** относительно переменных $x^1, \ldots, x^n$ либо $x_1, \ldots, x_n$, необходимо выразить, например, одну группу переменных $x_1, \ldots, x_n$ через другую группу переменных $x^1, \ldots, x^n$:

$$x_\mu = x_\mu(x^1, \ldots, x^n). \tag{4}$$

Если в качестве функции (4) взять

$$x_\mu = -\frac{\partial U^0}{\partial x^\mu}(x^1, \ldots, x^n), \tag{5}$$

то в этом случае равенство (3) примет вид

$$\left(-\frac{\partial U^1}{\partial x_\mu} + x^\mu\right) dx_\mu = 0,$$

так как $dx_1, \ldots, dx_n$ — независимые дифференциалы, то отсюда следуют равенства, зеркально симметричные равенствам (5):

$$x^\mu = \frac{\partial U^1}{\partial x_\mu}(x_1, \ldots, x_n). \tag{6}$$

В рассмотренном выше случае $n = 3$

$$x^1, x^2, x^3 \to x, y, z$$
$$x_1, x_2, x_3 \to f_x, f_y, f_z$$

и равенства (5) и (6) принимают вид:

$$f_x = -\frac{\partial U^0}{\partial x}(x, y, z),$$
$$f_y = -\frac{\partial U^0}{\partial y}(x, y, z),$$
$$f_z = -\frac{\partial U^0}{\partial z}(x, y, z),$$
$$x = \frac{\partial U^1}{\partial f_x}(f_x, f_y, f_z),$$
$$y = \frac{\partial U^1}{\partial f_y}(f_x, f_y, f_z),$$
$$z = \frac{\partial U^1}{\partial f_z}(f_x, f_y, f_z),$$

где

$$U^1(f_x, f_y, f_z) = U^0\big(x(f_x, f_y, f_z), y(f_x, f_y, f_z), z(f_x, f_y, f_z)\big) +$$
$$+ x(f_x, f_y, f_z)f_x + y(f_x, f_y, f_z)f_y + z(f_x, f_y, f_z)f_z.$$

В частности, если $U^0(x) = x^p$, то

$$f(x) = -\frac{\partial U^0}{\partial x} = -px^{p-1},$$
$$x(f) = \left(-\frac{f}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$
$$U^1(f) = U^0\big(x(f)\big) + x(f)f = (1-p)\left(-\frac{f}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}},$$
$$\frac{\partial U^1}{\partial f} = \left(-\frac{f}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} = x(f).$$

Итак, возникает принципиальный вопрос — откуда берётся равенство (2), содержащее билинейный многочлен?

Легко заметить, что это равенство получается из репрезентатора аддитивной физической структуры ранга $(n+2, n+2)$, у которой верификатор и репрезентатор имеют следующий вид:

$$\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\ldots\underline{i}_{n+2};\overline{k}_1\ldots\overline{k}_{n+2}}(\overset{n}{w}) \equiv 0$$

$$\overset{n}{w}_{\underline{i}\overline{k}} = \overline{s}(k) + x_\mu(i)x^\mu(k) + \underline{s}(i)$$

при двух дополнительных условиях:

условия зависимости скрытых параметров $\overline{s}$ и $\underline{s}$ от соответствующих координат,

$$\overline{s} = U^0(x^1, \ldots, x^n),$$
$$\underline{s} = -U^1(x_1, \ldots, x_n),$$

и условия рефлексии $\overset{n}{w}_{\underline{i}\overline{i}} = 0$.

Таким образом, получаем равенство (2):

$$U^0(x^1, \ldots, x^n) + x_1x^1 + \ldots + x_nx^n - U^1(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

и $2n$ самосогласованных уравнений:

$$\frac{\partial U^0}{\partial x^\mu}(x^\mu) = -x_\mu,$$
$$\frac{\partial U^1}{\partial x_\mu}(x_\mu) = x^\mu,$$

как следствие teorema egregium Михайличенко.

Заметим, что именно здесь, в рамках Теории физический структур, возникает необходимость введения верхних и нижних индексов для обозначения двух групп переменных и введения правила суммирования Эйнштейна:

$$x_1x^1 + \ldots + x_nx^n \equiv x_\mu x^\mu.$$

Переменные с нижними индексами $x_1, \ldots, x_n$ мы будем называть **ковариантными**, а переменные с верхними индексами $x^1, \ldots, x^n$ — **контравариантными**.

Заметим, что фундаментальное равенство (2), возникающее в рамках Теории физических структур, можно трактовать не только как фундамент теории потенциала, но и как источник двух преобразующих функций $F^0(x^\mu)$ и $F^1(x_\mu)$, осуществляющих преобразование от одних переменных x^μ к другим x_μ и обратно — от x_μ к x^μ:

$$x_\mu = -\frac{\partial F^0}{\partial x^\mu}(x^1, \ldots, x^\nu),$$

$$x^\mu = \frac{\partial F^1}{\partial x_\mu}(x_1, \ldots, x_\nu).$$

3. Сакральные потенциалы второго рода.

Существуют области физики, такие как, например, термодинамика или аналитическая механика, в которых для описания состояния системы используются четыре группы физических величин:

$$\begin{array}{ll} x^1, \ldots, x^n; & \xi^1, \ldots, \xi^n; \\ x_1, \ldots, x_n; & \xi_1, \ldots, \xi_n, \end{array}$$

и, соответственно, четыре сакральные потенциала, зависящие от двух групп переменных:

$$\begin{array}{ll} A^{00}(x^1, \ldots, x^n; \xi^1, \ldots, \xi^n), & A^{01}(x^1, \ldots, x^n; \xi_1, \ldots, \xi_n), \\ A^{10}(x_1, \ldots, x_n; \xi^1, \ldots, \xi^n), & A^{11}(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_n), \end{array}$$

и обладающие следующими замечательными свойствами симметрии:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi^\nu) = -x_\mu, & \dfrac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu, \\ \dfrac{\partial A^{01}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi_\nu) = -x_\mu, & \dfrac{\partial A^{01}}{\partial \xi_\nu}(x^\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu, \\ \dfrac{\partial A^{10}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi^\nu) = x^\mu, & \dfrac{\partial A^{10}}{\partial \xi^\nu}(x_\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu, \\ \dfrac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi_\nu) = x^\mu, & \dfrac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu}(x_\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu. \end{array}$$

При этом каждый из трёх потенциалов,

$$A^{01}(x^\mu, \xi_\nu), \qquad A^{10}(x_\mu, \xi^\nu), \qquad A^{11}(x_\mu, \xi_\nu)$$

выражается через один произвольно заданный потенциал $A^{00}(x^\mu, \xi^\nu)$ с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) &= A^{00}(x^\mu, \xi^\nu), \\ A^{01}(x^\mu, \xi_\nu) &= A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + \xi_\nu \xi^\nu, \\ A^{10}(x_\mu, \xi^\nu) &= A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu, \\ A^{11}(x_\mu, \xi_\nu) &= A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu + \xi_\nu \xi^\nu. \end{aligned}$$

Посмотрим, как такого рода потенциалы возникают в рамках Теории физических структур.

Утверждается, что общая теория сакральных потенциалов представляет собой криптоточечную сакральную геометрию на двух множествах $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ с одним “расстоянием”.

Итак, имеем два множества:
$\underline{\mathfrak{M}} = \{\underline{i}_1, \underline{i}_2 \ldots\}$ — множество **начальных** состояний и
$\overline{\mathfrak{M}} = \{\overline{k}_1, \overline{k}_2, \ldots\}$ — множество **конечных** состояний,
и соответствующий репрезентатор $w_{\underline{i}\overline{k}}$, играющий в сакральной геометрии роль “расстояния” между левым состоянием системы $\underline{i}$ и правым состоянием системы $\overline{k}$.

Если на двух множествах $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ имеет место физическая структура ранга (r,r) , то это означает, что между r^2 репрезентаторами $w_{\underline{i}_\lambda,\overline{k}_\rho}$ $(\lambda, \rho = 1, 2, \ldots, r)$ существует какая-то, заранее неизвестная, связь:

$$\begin{array}{c}\Phi(w_{\underline{i}_1\overline{k}_1}, \ldots, w_{\underline{i}_1\overline{k}_r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_{\underline{i}_r\overline{k}_1}, \ldots, w_{\underline{i}_r\overline{k}_r})\end{array} \equiv 0.$$

Согласно theorema egregium Михайличенко имеется два, и только два (!), типа решений этого сакрального уравнения.

1. Первый тип решений, лежащих в основании **векторной** сакральной геометрии, имеет следующий вид:
верификатор

$$\overset{n+1}{K}{}^{00}_{\underline{i}_1\ldots\underline{i}_{n+1};\overline{k}_1\ldots\overline{k}_{n+1}}(\overset{n}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \overset{n}{a}_{i_1k_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{i_1k_r} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \overset{n}{a}_{i_rk_1} & \ldots & \overset{n}{a}_{i_rk_r} & 1 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

репрезентатор

$$\overset{n}{a}_{\underline{i}\overline{k}} = x_1(i)x^1(k) + \ldots + x_n(i)x^n(k) = \Big(0; x_1(i), \ldots, x_n(i); 0\Big) \times \begin{pmatrix} 0 \\ x^1(k) \\ \vdots \\ x^n(k) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $n = r - 1$.

2. Второй тип решений, лежащих в основании **криптоточечной** сакральной геометрии, имеет следующий вид:
верификатор

$$\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\ldots\underline{i}_{n+2};\overline{k}_1\ldots\overline{k}_{n+2}}(\overset{n}{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & \overset{n}{w}_{i_1k_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{i_1k_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \overset{n}{w}_{i_rk_1} & \ldots & \overset{n}{w}_{i_rk_r} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

репрезентатор

$$\overset{n}{w}_{\underline{i}\overline{k}} = \overline{s}(k) + x_1(i)x^1(k) + \ldots + x_n(i)x^n(k) + \underline{s}(i) = \Big(1; x_1(i), \ldots, x_n(i); \underline{s}(i)\Big) \times \begin{pmatrix} \overline{s}(k) \\ x^1(k) \\ \vdots \\ x^n(k) \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $n = r - 2$.

Сакральные потенциалы возникают при рассмотрении решений второго типа.

Итак, рассмотрим аддитивную физическую структуру ранга $(m+n+2; m+n+2)$:

верификатор

$$\overset{m+n+2}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\ldots\underline{i}_{m+n+2};\overline{k}_1\ldots\overline{k}_{m+n+2}}(\overset{m+n}{w}) \equiv 0,$$

репрезентатор

$$\overset{m+n}{w}_{\underline{i}\overline{k}} = \overline{s}(k) + x_\mu(i)x^\mu(k) + \xi_\nu(i)\xi^\nu(k) + \underline{s}(i) =$$

$$= \big(1; x_1(i), \ldots, x_m(i), \xi_1(i), \ldots, \xi_n(i), \underline{s}(i)\big) \times \begin{pmatrix} \overline{s}(k) \\ x^1(k) \\ \ldots \\ x^m(k) \\ \xi^1(k) \\ \vdots \\ \xi^n(k) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следующий шаг состоит в дополнительном требовании, чтобы скрытые параметры $\underline{s}(i)$ и $\overline{s}(k)$ являлись произвольными функциями соответствующих ко- и контравариантных координат, то есть

$$\underline{s}(i) = -A^{11}\big(x_1(i), \ldots, x_m(i); \xi_1(i), \ldots, \xi_n(i)\big)$$
$$\overline{s}(k) = A^{00}\big(x^1(k), \ldots, x^m(k); \xi^1(k), \ldots, \xi^n(k)\big).$$

Таким образом, имеем аддитивную физическую структуру ранга $(m+n+2, m+n+2)$ с репрезентатором

$$\overset{m+n}{w}_{\underline{i}\overline{k}} = A^{00}\big(x^\mu(k), \xi^\nu(k)\big) + x_\mu(i)x^\mu(k) + \xi_\nu(i)\xi^\nu(k) - A^{11}\big(x_\mu(i), \xi_\nu(i)\big).$$

Наложим второе дополнительное условие – условие **рефлексии**:

$$\overset{m+n}{w}_{\underline{i}\overline{i}} = 0.$$

В результате дуально сопряжённые потенциалы $A^{00}(x^\mu, \xi^\nu)$ и $A^{11}(x_\mu, \xi_\nu)$ оказываются связанными между собой с помощью **двух билинейных** многочленов:

$$\boxed{A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu + \xi_\nu\xi^\nu - A^{11}(x_\mu, \xi_\nu) \equiv 0} \qquad (7)$$

После дифференцирования соотношения (7) получим:

$$\left(\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu} + x_\mu\right) dx^\mu + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu} + \xi_\nu\right) d\xi^\nu + $$
$$+ \left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu} + x^\mu\right) dx_\mu + \left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu} + \xi^\nu\right) d\xi_\nu = 0. \qquad (8)$$

Чтобы равенство (7) представляло собой **тождество** относительно переменных x^μ, ξ^ν (или x_μ, ξ_ν), необходимо выразить переменные x_μ, ξ_ν через x^μ, ξ^ν :

$$x_\mu = x_\mu(x^1, \ldots, x^m; \xi^1, \ldots, \xi^n) \qquad (9)$$

$$\xi_\nu = \xi_\nu(x^1, \dots, x^m; \xi^1, \dots, \xi^n, \tag{10}$$

(или выразить x^μ, ξ^ν через x_μ, ξ_ν) в результате чего равенство (7) превратиться в тождество относительно переменных $x^1, \dots, x^m; \xi^1, \dots, \xi^n$:

$$A^{00}(x^\mu, \xi^\mu) + x_\mu(x^\mu, \xi^n)x^\mu + \xi_\nu(x^\mu, \xi^\nu)\xi^\nu - A^{11}\big(x_\mu(x^\mu, \xi^\nu), \xi_\nu(x^\mu, \xi^\nu)\big) \equiv 0.$$

Если в качестве функций (9) и (10) взять

$$x_\mu = -\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi^\nu)$$

и

$$\xi_\nu = -\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\nu, \xi^\nu),$$

то в этом случае равенство (7) примет вид:

$$\left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu} + x^\mu\right) dx_\mu + \left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu} + \xi^\nu\right) d\xi_\nu = 0. \tag{11}$$

Так как $dx_1, \dots, dx_m$ и $d\xi_1, \dots, d\xi_n$ — независимые дифференциалы, то из равенства (11) следует $m+n$ соотношений:

$$\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi_\nu) = x^\mu \qquad \frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu}(x_\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu.$$

Итак, из Теории физических структур следует существование двух сакральных дуально сопряжённых потенциалов $A^{00}(x^1, \dots, x^m; \xi^1, \dots, \xi^n)$ и $A^{11}(x_1, \dots, x_m; \xi_1, \dots, \xi_n)$, играющих роль скрытых параметров $\overline{s}$ и $-\underline{s}$ и связанных между собой двумя билинейными многочленами:

$$A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu + \xi_\nu \xi^\nu - A^{11}(x_\mu, \xi_\nu) = 0.$$

В итоге получаем $2m+2n$ самосогласованных уравнений:

$$\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi^\nu) = -x_\mu, \qquad \frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu,$$

$$\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi_\nu) = x^\mu, \qquad \frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu}(x_\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu.$$

4. Ещё два дуально сопряжённых потенциала $A^{01}(x^\mu, \xi_\nu)$ и $A^{10}(x_\mu, \xi^\nu)$

Итак, мы видим, что из Теории физических структур следует существование двух фундаментальных сакральных дуально сопряжённых потенциала $A^{00}(x^\mu, \xi^\nu)$ и $A^{11}(x_\mu, \xi_\nu)$, представляющих собой контра- и ковариантные скрытые параметры репрезентатора

$$\overset{m+n}{w}_{\underline{i}\overline{k}} = \overline{s}(k) + x_\mu(i)x^\mu(k) + \xi_\nu(i)\xi^\nu(k) + \overline{s}(i).$$

Из факта существования потенциала $A^{00}(x^\mu, \xi^\nu)$ (или потенциала $A^{11}(x_\mu, \xi_\nu)$) следует существование ещё двух сакральных потенциалов $A^{10}(x_\mu, \xi^\nu)$ и $A^{01}(x^\mu, \xi_\nu)$.

В самом деле, из равенств

$$\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi^\nu) = -x_\mu \quad \text{и} \quad \frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu$$

следует

$$dA^{00} = -x_\mu dx^\mu - \xi_\nu d\xi^\nu. \tag{12}$$

Перепишем равенство (12) в виде:

$$dA^{00} = -d(x_\mu x^\mu) + x^\mu dx_\mu - \xi_\nu d\xi^\nu$$

или

$$d(A^{00} + x_\mu x^\mu) = x^\mu dx_\mu - \xi_\nu d\xi^\nu,$$

то есть

$$dA^{10} = x^\mu dx_\mu - \xi_\nu dx^\nu,$$

где

$$A^{10}(x_\mu, \xi^\nu) = A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu. \tag{13}$$

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial A^{10}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi^\nu) = x^\mu \qquad \frac{\partial A^{10}}{\partial \xi^\nu}(x_\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu.$$

С другой стороны, равенство (12) можно переписать в виде:

$$dA^{00} = -x_\mu dx^\mu - d(\xi_\nu \xi^\nu) + \xi^\nu d\xi_\nu \tag{14}$$

или

$$d(A^{00} + \xi_\nu \xi^\nu) = -x_\mu dx^\mu + \xi^\nu d\xi_\nu,$$

то есть

$$dA^{01} = -x_\mu dx^\mu + \xi^\nu d\xi_\nu,$$

где

$$A^{01}(x^\mu, \xi_\nu) = A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + \xi_\nu \xi^\nu. \tag{15}$$

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial A^{01}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi_\nu) = -x_\mu, \qquad \frac{\partial A^{01}}{\partial \xi_\nu}(x^\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu.$$

Если в качестве исходного взять потенциал $A^{11}(x_\mu, \xi_\nu)$, то из соотношений

$$\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu} = x^\mu \qquad \frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu} = \xi^\nu$$

следует:

$$dA^{11} = x^{\mu}dx_{\mu} + \xi^{\nu}d\xi_{\nu}. \qquad (16)$$

Перепишем равенство (16) в виде:

$$dA^{11} = d(x_{\mu}x^{\mu}) - x_{\mu}dx^{\mu} + \xi^{\nu}d\xi_{\nu}$$

или

$$d(A^{11} - x_{\mu}x^{\mu}) = -x_{\mu}dx^{\mu} + \xi^{\nu}d\xi_{\nu},$$

то есть

$$dA^{01} = -x_{\mu}dx^{\mu} + \xi^{\nu}d\xi_{\nu},$$

где

$$A^{01} = (x^{\mu}, \xi_{\nu}) = A^{11}(x_{\mu}, \xi_{\nu}) - x_{\mu}x^{\mu}. \qquad (17)$$

Аналогичным образом приходим к соотношению:

$$A^{10}(x_{\mu}, \xi^{\nu}) = A^{11}(x_{\mu}, \xi_{\nu}) - \xi_{\nu}\xi^{\mu}. \qquad (18)$$

Заметим, что факт существования соотношений (13) и (15)

$$A^{00}(x^{\mu}, \xi^{\nu}) + x_{\mu}x^{\mu} - A^{10}(x_{\mu}, \xi^{\nu}) = 0$$

и

$$A^{00}(x^{\mu}, \xi^{\nu}) + \xi_{\nu}\xi^{\nu} - A^{01}(x^{\mu}, \xi_{\nu}) = 0,$$

можно истолковывать как результат операции рефлексии двух репрезентаторов:

$$\overset{m}{w}\,(1)_{\underline{i}\bar{k}} = A^{00}\big(x^{\mu}(k), \xi^{\nu}(k)\big) + x_{\mu}(i)x^{\mu}(k) - A^{10}\big(x_{\mu}(i), \xi^{\nu}(i)\big)$$

и

$$w\,(2)_{\underline{i}\bar{k}} = A^{00}\big(x^{\mu}(k), \xi^{\nu}(k)\big) + \xi_{\nu}(i)\xi^{\nu}(k) - A^{01}\big(x^{\mu}(i), \xi_{\nu}(i)\big),$$

имеющих, как мы увидим ниже, в термодинамике простой смысл.

Итак, исходя из фундаментальных потенциалов $A^{00}(x^{\mu}, \xi^{\nu})$ и $A^{11}(\xi_{\mu}, \xi_{\nu})$, мы получаем ещё два новых дуально сопряжённых потенциала,

$$A^{01}(x^{\mu}, \xi_{\nu}) = A^{00}(x^{\mu}, \xi^{\nu}) + \xi_{\nu}\xi^{\nu} = A^{11}(x_{\mu}, \xi_{\nu}) - x_{\mu}x^{\mu}$$

$$A^{10}(x_{\mu}, \xi^{\nu}) = A^{00}(x^{\mu}, \xi^{\nu}) + x_{\mu}x^{\mu} = A^{11}(x_{\mu}, \xi_{\nu}) - \xi_{\nu}\xi^{\nu},$$

связанных между собой следующими соотношениями:

$$A^{00}(x^{\mu}, \xi^{\nu}) + x_{\mu}x^{\mu} - A^{10}(x_{\mu}, \xi^{\nu}) = 0\ ,$$

$$A^{01}(x^{\mu}, \xi_{\nu}) + x_{\mu}x^{\mu} - A^{11}(x_{\mu}, \xi_{\nu}) = 0\ ,$$

$$A^{00}(x^{\mu}, \xi^{\nu}) + \xi_{\nu}\xi^{\nu} - A^{01}(x^{\mu}, \xi_{\nu}) = 0\ ,$$

$$A^{10}(x_{\mu}, \xi^{\nu}) + \xi_{\nu}\xi^{\nu} - A^{11}(x_{\mu}, \xi_{\nu}) = 0$$

или

$$\begin{aligned}
A^{00}(x^\mu,\xi^\nu) &= A^{00}(x^\mu,\xi^\nu)\ ,\\
A^{01}(x^\mu,\xi_\nu) &= A^{00}(x^\mu,\xi^\nu)+\xi_\nu\xi^\nu\ ,\\
A^{10}(x_\mu,\xi^\nu) &= A^{00}(x^\mu,\xi^\nu)+x_\mu x^\mu\ ,\\
A^{11}(x_\mu,\xi_\nu) &= A^{00}(x^\mu,\xi^\nu)+x_\mu x^\mu+\xi_\nu\xi^\nu
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
A^{00}(x^\mu,\xi^\nu) &= A^{11}(x_\mu,\xi_\nu)-x_\mu x^\mu-\xi_\nu\xi^\nu\ ,\\
A^{01}(x^\mu,\xi_\nu) &= A^{11}(x_\mu,\xi_\nu)-x_\mu x^\mu\ ,\\
A^{10}(x_\mu,\xi^\nu) &= A^{11}(x_\mu,\xi_\nu)-\xi_\nu\xi^\nu\ ,\\
A^{11}(x_\mu,\xi_\nu) &= A^{11}(x_\mu,\xi_\nu)\ ,
\end{aligned}$$

то есть

$$\boxed{A^{00}-A^{01}-A^{10}+A^{11}=0}$$

или

$$\overset{1}{K}{}^{11}(A)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ -1 & A^{00} & A^{01}\\ -1 & A^{10} & A^{11}\end{vmatrix}\equiv 0.$$

В итоге получаем полную систему $4m+4n$ самосогласованных уравнений, связывающих между собой четыре группы каких-либо физических величин:

$$\begin{array}{ll}
x^1,\ldots,x^m; & \xi^1,\ldots,\xi^n;\\
x_1,\ldots,x_m; & \xi_1,\ldots,\xi_n;
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu,\xi^\nu)=-x_\mu, & \frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\mu,\xi^\nu)=-\xi_\nu,\\[2ex]
\frac{\partial A^{01}}{\partial x^\mu}(x^\mu,\xi_\nu)=-x_\mu, & \frac{\partial A^{01}}{\partial \xi_\nu}(x^\mu,\xi_\nu)=\xi^\nu,\\[2ex]
\frac{\partial A^{10}}{\partial x_\mu}(x_\mu,\xi^\nu)=x^\mu, & \frac{\partial A^{10}}{\partial \xi^\nu}(x_\mu,\xi^\nu)=-\xi_\nu,\\[2ex]
\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu,\xi_\nu)=x^\mu, & \frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu}(x_\mu,\xi_\nu)=\xi^\nu,\\[2ex]
\text{где }\ \mu=1,2,\ldots,m & \nu=1,2,\ldots,n\ .
\end{array}$$

Итак, общая теория сакральных потенциалов представляет собой криптоточечную сакральную геометрию на двух множествах $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ с одним “фундаментальным расстоянием”.

Образно говоря, поливариантная термодинамика – это классический балет с участием $m+n$ пар

$$x^1,\dots,x^m; \qquad \xi^1,\dots,\xi^n;$$

$$x_1,\dots,x_m; \qquad \xi_1,\dots,\xi_n;$$

Сакральная формулировка общей теории сакральных потенциалов

$$\boxed{\overset{m+n+1}{\boldsymbol{K}}{}^{\mathbf{11}}_{\boldsymbol{i_1\dots i_{m+n+2};k_1\dots k_{m+n+2}}}(\overset{m+n}{\boldsymbol{w}}) = \mathbf{0}.}$$

$$\overset{m+n}{w}_{\underline{i}\bar{k}} = A^{00}\big(x^\mu(k),\xi^\nu(k)\big) + x_\mu(i)x^\mu(k) + \xi_\alpha(i)\xi^\alpha(k) - A^{11}\big(x_\mu(i),\xi_\nu(i)\big)$$

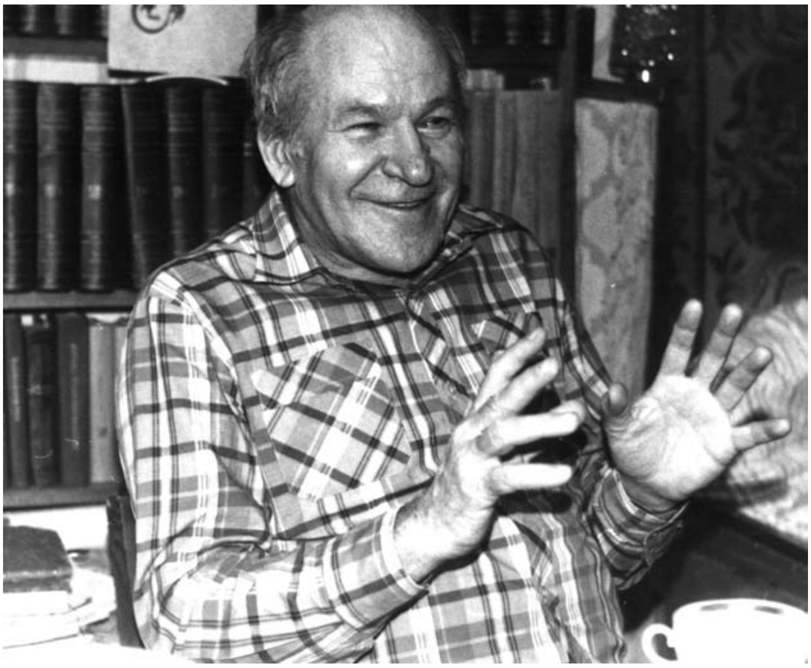
$$\boxed{\overset{m+n}{w}_{\underline{i}\bar{i}} = A^{00}\big(x^\mu(i),\xi^\nu(i)\big) + x_\mu(i)x^\mu(i) + \xi_\alpha(i)\xi^\alpha(i) - A^{11}\big(x_\mu(i),\xi_\nu(i)\big) \equiv 0}$$

$$\overset{m}{w}\,(1)_{\underline{i}\bar{k}} = A^{00}\big(x^\mu(k),\xi^\nu(k)\big) + x_\mu(i)x^\mu(k) - A^{10}\big(x_\mu(i),\xi^\nu(i)\big)$$

$$\boxed{\overset{m}{w}\,(1)_{\underline{i}\bar{i}} = A^{00}\big(x^\mu(i),\xi^\nu(i)\big) + x_\mu(i)x^\mu(i) - A^{10}\big(x_\mu(i),\xi^\nu(i)\big) \equiv 0}$$

$$\overset{n}{w}\,(2)_{\underline{i}\bar{k}} = A^{00}\big(x^\mu(k),\xi^\nu(k)\big) + \xi_\nu(i)\xi^\nu(k) - A^{01}\big(x^\mu(i),\xi_\nu(i)\big)$$

$$\boxed{\overset{n}{w}\,(2)_{\underline{i}\bar{i}} = A^{00}\big(x^\mu(i),\xi^\nu(i)\big) + \xi_\nu(i)\xi^\nu(i) - A^{01}\big(x^\mu(i),\xi_\nu(i)\big) \equiv 0}$$



Термодинамика – это просто!

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Пример 16. Аналитическая термодинамика

1. Моновариантная термодинамика

Рассмотрим множество состояний произвольного термодинамического тела. Оно характеризуется четырьмя физическими величинами: температурой T, энтропией S, давлением p, объемом V.

В случае моновариантной термодинамики полная система самосогласованных уравнений, связывающих между собой $T,\ S,\ p,\ V$ имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial U}{\partial S}(S,V) = T & \dfrac{\partial U}{\partial V}(S,V) = -p \\ \dfrac{\partial H}{\partial S}(S,p) = T & \dfrac{\partial H}{\partial p}(S,p) = V \\ \dfrac{\partial F}{\partial T}(T,V) = -S & \dfrac{\partial F}{\partial V}(T,V) = -p \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial T}(T,p) = -S & \dfrac{\partial \Phi}{\partial p}(T,p) = V \end{array}, \tag{1}$$

где $U,\ H,\ F,\ \Phi$ — четыре термодинамических потенциала;

$U(S,V)$ — внутренняя энергия,
$H(S,p)$ — энтальпия,
$F(T,V)$ — свободная энергия,
$\Phi(T,p)$ — энергия Гиббса.

Система самосогласованных уравнений (1) получается из основного уравнения термодинамики

$$dU = TdS - pdV \tag{2}$$

следующим образом:

Уравнение (2) может быть переписано в виде:

$$dU = TdS - d(pV) + Vdp$$

или

$$d(U + pV) = TdS + Vdp,$$

то есть

$$dH = TdS + Vdp, \tag{3}$$

где

$$\boxed{H(S,p) = U(S,V) + pV}$$

Уравнение (2) может быть переписано в новом виде:

$$dU = d(TS) - SdT - pdV$$

или

$$d(U - TS) = -SdT - pdV,$$

то есть

$$dF = -SdT - pdV, \tag{4}$$

где

$$\boxed{F(T, V) = U(S, V) - TS.}$$

Уравнение (2) может быть переписано в виде:

$$dU = d(TS) - SdT - d(pV) + Vdp$$

или

$$d(U - TS + pV) = -SdT + Vdp,$$

то есть

$$d\Phi = -SdT + Vdp, \tag{5}$$

где

$$\boxed{\Phi(T, p) = U(S, V) - TS + pV.}$$

Из соотношений (2)–(5) следует полная система самосогласованных уравнений (1).

Но откуда берётся основное уравнение термодинамики (2)?

При рассмотрении Примера 15 было показано, как сакральные потенциалы второго рода возникают в Теории физических структур.

В самом общем случае четыре сакральных потенциала

$$A^{00}(x^\mu, \xi^\nu), \quad A^{01}(x^\mu, \xi_\nu), \quad A^{10}(x_\mu, \xi^\nu), \quad A^{11}(x_\mu, \xi_\nu)$$

связаны между собой с помощью двух билинейных многочленов $x_\mu x^\mu$ и $\xi_\nu \xi^\nu$ следующим образом

$$\begin{aligned}
&A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu + \xi_\nu \xi^\nu - A^{11}(x_\mu, \xi_\nu) = 0,\\
&A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu - A^{10}(x_\mu, \xi^\nu) = 0,\\
&A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + \xi_\nu \xi^\mu - A^{01}(x^\mu, \xi_\nu) = 0,
\end{aligned}$$

откуда после дифференцирования возникает полная система самосогласованных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi^\nu) = -x_\mu, && \frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu,\\
&\frac{\partial A^{01}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi_\nu) = -x_\mu, && \frac{\partial A^{01}}{\partial \xi_\nu}(x^\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu,\\
&\frac{\partial A^{10}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi^\nu) = x^\mu, && \frac{\partial A^{10}}{\partial \xi^\nu}(x_\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu,\\
&\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi_\nu) = x^\mu && \frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu}(x_\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu\\
&\mu = 1, 2, \ldots, m && \nu = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{6}$$

Полагая $m = n = 1$ и вводя новые обозначения:

$$x^1 = S \qquad \xi^1 = V$$
$$x_1 = -T \qquad \xi_1 = p$$

$$A^{00}(x^1, \xi^1) = U(S, V)$$
$$A^{01}(x^1, \xi_1) = H(S, p)$$
$$A^{10}(x_1, \xi^1) = F(T, V)$$
$$A^{11}(x_1, \xi_1) = \Phi(T, p)$$

перепишем исходную систему самосогласованных уравнений (6) в виде системы уравнений (1), лежащей в основании моновариантной термодинамики.

Заметим, что введённые в теории сакральных потенциалов два репрезентатора,

$$\overset{m}{w}(1)_{\underline{i}\overline{k}} = A^{00}\big(x^\mu(k), \xi^\nu(k)\big) + x_\mu(i) x^\mu(k) - A^{10}\big(x_\mu(i), \xi^\nu(i)\big)$$
$$\overset{n}{w}(2)_{\underline{i}\overline{k}} = A^{00}\big(x^\mu(k), \xi^\nu(k)\big) + \xi_\nu(i) \xi^\nu(k) - A^{01}\big(x^\mu(i), \xi_\nu(i)\big),$$

в новых обозначениях имеют вид:

$$\overset{1}{w}(1)_{\underline{i}\overline{k}} = U_k - T_i S_k - F_i, \tag{7}$$

$$\overset{1}{w}(2)_{\underline{i}\overline{k}} = U_k + p_i V_k - H_i. \tag{8}$$

С другой стороны, исходя из основного уравнения термодинамики (2), нетрудно показать, что

работа, совершённая системой при переходе из состояния $\underline{i}$ в состояние $\overline{k}$ сначала по изотерме, а потом по адиабате, равна

$$\overset{TS}{A}_{\underline{i}\overline{k}} = U_k - T_i S_k - F_I; \tag{9}$$

аналогичным образом можно показать, что количество тепла, полученное системой при переходе из состояния $\underline{i}$ в состояние $\overline{k}$ сначала по изобаре, а затем по изохоре, равно

$$\overset{pV}{Q}_{\underline{i}\overline{k}} = U_k + p_i V_k - H_i. \tag{10}$$

Сравнивая равенства (7) и (9), можно утверждать, что репрезентатор

$$\overset{1}{w}(1)_{\underline{i}\overline{k}} = \overset{TS}{Q}_{\underline{i}\overline{k}}$$

имеет простой физический смысл работы, совершаемой системой при переходе из состояния $\underline{i}$ в состояние $\overline{k}$ сначала по изохоре, а затем по адиабате.

Точно так же, сравнивая равенство (8) и (10), можем утверждать, что репрезентатор

$$\overset{1}{w}(2)_{\underline{i}\overline{k}} = \overset{pV}{Q}_{\underline{i}\overline{k}}$$

имеет простой физический смысл количества тепла, полученного системой при переходе из состояния $\underline{i}$ в состояние $\overline{k}$ сначала по изобаре, а затем по изохоре.

Итак, устанавливаем, что три термодинамических потенциала $U(S,V)$, $F(T,V)$ и $H(S,p)$ являются скрытыми параметрами двух репрезентаторов $\overset{1}{w}(1)_{\underline{i}\overline{k}}$ и $\overset{1}{w}(2)_{\underline{i}\overline{k}}$;

внутренняя энергия $U(S,V)$ играет роль контравариантного скрытого параметра, взятого со знаком минус, первого $\overset{1}{w}(1)_{\underline{i}\overline{k}}$ и второго $\overset{1}{w}(2)_{\underline{i}\overline{k}}$ репрезентатора;

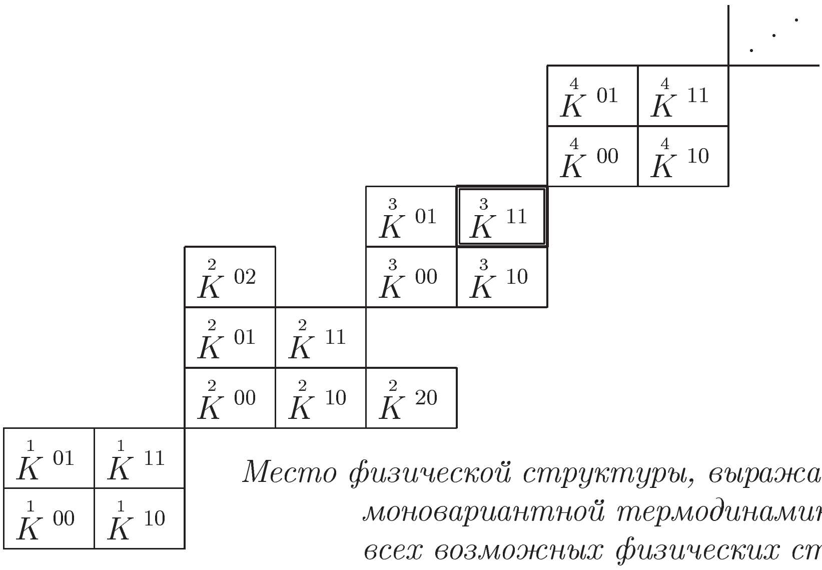
свободная энергия $F(T,V)$ играет роль ковариантного скрытого параметра первого репрезентатора $\overset{1}{w}(1)_{\underline{i}\overline{k}}$;

а энтальпия $H(S,p)$ играет роль ковариантного скрытого параметра второго репрезентатора $\overset{1}{w}(2)_{\underline{i}\overline{k}}$.

Оставшийся четвертый термодинамический потенциал, энергия Гиббса $\Phi(T,p)$ играет роль ковариантного скрытого параметра репрезентатора фундаментальной физической структуры ранга (4,4).

Образно говоря, моновариантная термодинамика – это классический балет с участием двух пар:

$$x^1 = S \qquad \xi^1 = V$$
$$x_1 = -T \qquad \xi_1 = p,$$



Место физической структуры, выражающей сущность моновариантной термодинамики, среди всех возможных физических структур.

Сакральная формулировка моновариантной термодинамики

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{3}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\underline{i}_2\underline{i}_3\underline{i}_4;\overline{k}_1\overline{k}_2\overline{k}_3\overline{k}_4}(\overset{2}{w}) \equiv 0}}$$

$$\overset{2}{w}_{\underline{i}\overline{k}} = A^{00}\big(x^1(k), \xi^1(k)\big) + x_1(i)x^1(k) + \xi_1(i)\xi^1(k) - A^{11}\big(x_1(i), \xi_1(i)\big) = \\ = U(S_k, V_k) - T_i S_k + p_i V_k - \Phi(T_i, p_i)$$

$$\boxed{\overset{2}{w}_{\underline{i}\overline{i}} = U_i - T_i S_i + p_i V_i - \Phi_i \equiv 0.}$$

$$\overset{1}{w}\,(1)_{\underline{i}\overline{k}} = A^{00}\big(x^1(k), \xi^1(k)\big) + x_1(i)x^1(k) - A^{10}\big(x_1(i), \xi^1(i)\big) = \\ = U(S_k, V_k) - T_i S_k - F(T_i, V_i) = \overset{TS}{A}_{\underline{i}\overline{i}}$$

$$\boxed{\overset{1}{w}\,(1)_{\underline{i}\overline{i}} = U_i - T_i S_i - F_i \equiv 0.}$$

$$\overset{1}{w}\,(2)_{\underline{i}\overline{k}} = A^{00}\big(x^1(k), \xi^1(k)\big) + \xi_1(i)\xi^1(k) - A^{01}\big(x^1(i), \xi_1(i)\big) = \\ = U(S_k, V_k) + p_i V_k - H(S_i, p_i) = \overset{pV}{Q}_{\underline{i}\overline{k}}$$

$$\boxed{\overset{1}{w}\,(2)_{\underline{i}\overline{i}} = U_i + p_i V_i - H_i \equiv 0.}$$

2. Поливариантная термодинамика

Рассмотрим множество состояний произвольного термодинамического тела, находящегося под действием различных обобщённых сил [1]. Оно характеризуется четырьмя группами переменных:

температурой T,
энтропией S,
обобщёнными силами $A_1, \ldots, A_n$ и
обобщёнными координатами $a^1, \ldots, a^n$.

В случае поливариантной термодинамики полная система самосогласованных уравнений, связывающих между собой $T, S.A_1, \ldots, A_n, a^1, \ldots, a^n$, имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial S}(S;a^1,\ldots,a^n)=T && \frac{\partial U}{\partial a^\nu}(S;a^1,\ldots,a^n)=-A_\nu\\
&\frac{\partial H}{\partial S}(S;A_1,\ldots,A_n)=T && \frac{\partial H}{\partial A_\nu}(S;A_1,\ldots,A_n)=a^\nu\\
&\frac{\partial F}{\partial T}(T;a^1,\ldots,a^n)=-S && \frac{\partial F}{\partial a^\nu}(T;a^1,\ldots,a^n)=-A_\nu\\
&\frac{\partial \Phi}{\partial T}(T;A_1,\ldots,A_n)=-S && \frac{\partial \Phi}{\partial A_\nu}(T;A_1,\ldots,A_n)=a^\nu\ ,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где U, H, F, Φ – четыре термодинамических потенциала, связанные между собой следующими соотношениями:

$U(S;a^1,\ldots,a^n)=U(S;a^1,\ldots,a^n)$ — внутренняя энергия,

$H(S;A_1,\ldots,A_n)=U(S;a^1,\ldots,a^n)+A_\mu a^\mu$ — энтальпия,

$F(T;a^1,\ldots,a^n)=U(S;a^1,\ldots,a^n)-TS$ — свободная энергия,

$\Phi(T;A_1,\ldots,A_n)=U(T;A_1,\ldots,A_n)+A_\mu a^\mu-TS$ — энергия Гиббса.

$$\mu=1,2,\ldots,n$$

Полная система $4+4n$ самосогласованных уравнений (11) может быть получена из основного уравнения поливариантной термодинамики:

$$dU=TdS-A_\nu da^\nu. \tag{12}$$

Но откуда берётся основное уравнение (12)?

Утверждается, что поливариантная термодинамика представляет собой $n+1$-мерную криптоточечную сакральную геометрию на двух множествах $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ с одним "расстоянием".

При рассмотрении Примера 15 было показано, как сакральные потенциалы второго рода возникают из Теории физических структур.

Утверждается, что поливариантная термодинамика представляет собой криптоточечную сакральную геометрию на двух множествах $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ с одним "расстоянием".

В основании поливариантной термодинамики лежит фундаментальная физическая структура ранга $(n+3,n+3)$ рода

$$\overset{n+2}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\ldots\underline{i}_{n+3};\overline{k}_1\ldots\overline{k}_{n+3}}(\overset{n+1}{w})\equiv 0$$

$$\overset{n+1}{w}_{\underline{i}\overline{k}}=A^{00}\big(x^1(k),\xi^\alpha(k)\big)+x_1(i)x^1(k)+\xi_\alpha(i)\xi^\alpha(i)-A^{11}\big(x_1(k),\xi_\alpha(k)\big)$$

Полагая $m=1$ при произвольном n, осуществим следующие переобозначения:

$$\begin{gathered}
x^1 = S \qquad \xi^1, \ldots, \xi^n = a^1, \ldots, a^n \\
x_1 = -T \qquad \xi_1, \ldots, \xi_n = A_1, \ldots, A_n \\
A^{00}(x^1; \xi^1, \ldots, \xi^n) = U(S; a^1, \ldots, a^n) \\
A^{01}(x^1; \xi_1, \ldots, \xi_n) = H(S; A_1, \ldots, A_n) \\
A^{10}(x_1; \xi^1, \ldots, \xi^n) = F((T; a^1, \ldots, a^n) \\
A^{11}(x_1; \xi_1, \ldots, \xi_n) = \Phi(T; A_1, \ldots, A_n).
\end{gathered}$$

В новых обозначениях репрезентатор $\overset{n+1}{w}_{\underline{i}\bar{k}}$ примет вид:

$$\overset{n+1}{w}_{\underline{i}\bar{k}} = U\big(S_k; a_k^1, \ldots, a_k^n\big) - T_i S_k + A_{\mu(i)} a_k^\mu - \Phi\big(T_i; A_{1(i)}, \ldots, A_{n(i)}\big).$$

Воспользуемся требованием рефлексии

$$\overset{n+1}{w}_{\underline{i}\bar{i}} = 0$$

и получим связь между термодинамическими потенциалами:

$$\boxed{U(S; a^1, \ldots, a^n) - TS + A_\mu a^\mu - \Phi(T; A_1, \ldots, A_n) = 0.} \tag{13}$$

Дифференцируя равенство (13), получим:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} - T\right) dS + \left(\frac{\partial U}{\partial a^\mu} + A_\mu\right) da^\mu + \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial T} - S\right) dT + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial A_\mu} + a^\mu\right) dA_\mu = 0.$$

Если

$$\frac{\partial U}{\partial S}(S, a^\mu) = T \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial a^\mu}(S, a^\mu) = -A_\mu, \tag{14}$$

то

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T}(T, A_\mu) = -S \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial A_\mu}(T, A_\mu) = a^\mu.$$

Из равенств (14) следует

$$dU = TdS - A_\mu da^\mu. \tag{15}$$

Перепишем (15) в виде:

$$dU = d(TS) - SdT - A_\mu da^\mu$$

или

$$dF = -SdT - A_\mu da^\mu,$$

где

$$\boxed{F(T; a^\mu) = U(S; a^\mu) - TS.}$$

Перепишем равенство (15) в виде

$$dU = TdS - d(A_\mu a^\mu) + a^\mu dA_\mu$$

или

$$dH = TdS + a^\mu dA_\mu,$$

где

$$\boxed{H(S; A_\mu) = U(S, a^\mu) + A_\mu a^\mu.}$$

И наконец, перепишем равенство (15) в виде:

$$dU = d(TS) - SdT - d(A_\mu a^\mu) + a^\mu dA_\mu$$

или

$$d\Phi = -SdT + a^\mu dA_\mu,$$

где

$$\boxed{\Phi(T; A_\mu) = U(S; a^\mu) - TS + A_\mu a^\mu.}$$

Итак, исходя из физической структуры ранга $(n+3, n+3)$ рода

$$\overset{n+2}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1 \ldots \underline{i}_{n+3}; \overline{k}_1 \ldots \overline{k}_{n+3}}(\overset{n+1}{w}) \equiv 0,$$

мы получили полный набор четырех сакральных потенциалов:

$$\begin{array}{ll} U(S; a^\mu) & H(A; A_\mu) \\ F(T; a^\mu) & \Phi(T; A_\mu). \end{array}$$

Отсюда, как следствие, обнаруживаются ещё две физические структуры: одна ранга (3,3) рода

$$\overset{2}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1 \underline{i}_2 \underline{i}_3; \overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_3}(\overset{1}{w}) \equiv 0$$

$$\overset{1}{w}_{\underline{i}\overline{k}} = U(S_k, a^\mu_k) - T_i S_k - F(T_i, a^\mu_i),$$

другая — ранга $(n+2, n+2)$ рода

$$\overset{n+1}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1 \ldots \underline{i}_{n+3}; \overline{k}_1 \ldots \overline{k}_{n+3}}(\overset{n}{w}) \equiv 0$$

$$\overset{n}{w}_{\underline{i}\overline{k}} = U(S_k, a^\mu_k) - A_\mu(i) a^\mu - H(S_i, A^\mu).$$

Итак, в случае поливариантной термодинамики четыре сакральных потенциала,

$$\begin{aligned} A^{00}(x^1, \xi^\nu) &= U(S; a^1, \ldots, a^n) \\ A^{01}(x^1, \xi_\nu) &= H(S; A_1, \ldots, A_n) \\ A^{10}(x_1, \xi^\nu) &= F(T; a^1, \ldots, a^n) \\ A^{11}(x_1, \xi_\nu) &= \Phi(T; A_1, \ldots, A_n) \end{aligned}$$

связаны между собой с помощью двух билинейных многочленов $x_1x^1 = -TS$ и $\xi_\nu\xi^\nu = A_\nu a^\nu$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&A^{00}(x^1,\xi^\nu) + x_1x^1 + \xi_\nu\xi^\nu - A^{11}(x_1,\xi_\nu) = 0,\\
&A^{00}(x^1,\xi^\nu) + x_1x^1 - A^{10}(x_1,\xi^\nu) = 0,\\
&A^{00}(x^1,\xi^\nu) + \xi_\nu\xi^\nu - A^{01}(x^1,\xi_\nu) = 0,
\end{aligned}
$$

или – в новых обозначениях:

$$
\begin{aligned}
&U(S;a^1,\ldots,a^n) - TS + A_1a^1 + \ldots + A_na^n - \Phi(T;A_1,\ldots,A_n) = 0,\\
&U(S;a^1,\ldots,a^n) - TS - F(T;a^1,\ldots,a^n) = 0,\\
&U(S;a^1,\ldots,a^n) + A_1a^1 + \ldots + A_na^n - H(S;A_1,\ldots,A_n) = 0,
\end{aligned}
$$

откуда после дифференцирования получаем полную систему самосогласованных уравнений (11), лежащих в основании поливариантной термодинамики.

Образно говоря, поливариантная термодинамика – это классический балет с участием $1+n$ пар:

$$
\begin{array}{ccccc}
x^1 = S & \quad & \xi^1 = a^1 & \ldots & \xi^n = a^n\\
x_1 = -T & \quad & \xi_1 = A_1 & \ldots & \xi_n = A_n.
\end{array}
$$

Сакральная формулировка поливариантной термодинамики

$$
\boxed{\boldsymbol{\overset{n+2}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1\ldots\underline{i}_{n+3};\bar{k}_1\ldots\bar{k}_{n+3}}(\overset{n+1}{w}) \equiv 0}}
$$

$$
\begin{aligned}
\overset{n+1}{w}{}_{\underline{i}\bar{k}} = {} & A^{00}\big(x^1(k),\xi^\mu(k)\big) + x_1(i)x^1(k) + \xi_\mu(i)\xi^\mu(k) - A^{11}\big(x_1(i),\xi_\mu(i)\big) = \\
& = U\big(S_k;a_k^1,\ldots,a_k^n\big) - T_iS_k + A_{i\mu}a_k^\mu - \Phi\big(T_i;A_{i1},\ldots,A_{in}\big).
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\overset{n+1}{w}{}_{\underline{i}\bar{i}} = U\big(S_i;a_i^1,\ldots,a_i^n\big) - T_iS_i + A_{i\mu}a_i^\mu - \Phi\big(T_i;A_{i1},\ldots,A_{in}\big) \equiv 0.}
$$

$$
\begin{aligned}
\overset{1}{w}\,(1)_{\underline{i}\bar{k}} = {} & A^{00}\big(x^1(k);\xi^1(k)\big) + x_1(i)x^1(k) - A^{10}\big(x_1(i),\xi^1(i)\big) = \\
& = U(S_k;a_k^1,\ldots,a_k^n) - T_iS_k - F(T_i;a_i^1,\ldots,a_i^n)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\overset{1}{w}\,(1)_{\underline{i}\bar{i}} = U(S_i; a_i^1, \ldots, a_i^n) - T_i S_i - F(T_i; a_i^1, \ldots, a_i^n) \equiv 0.}$$

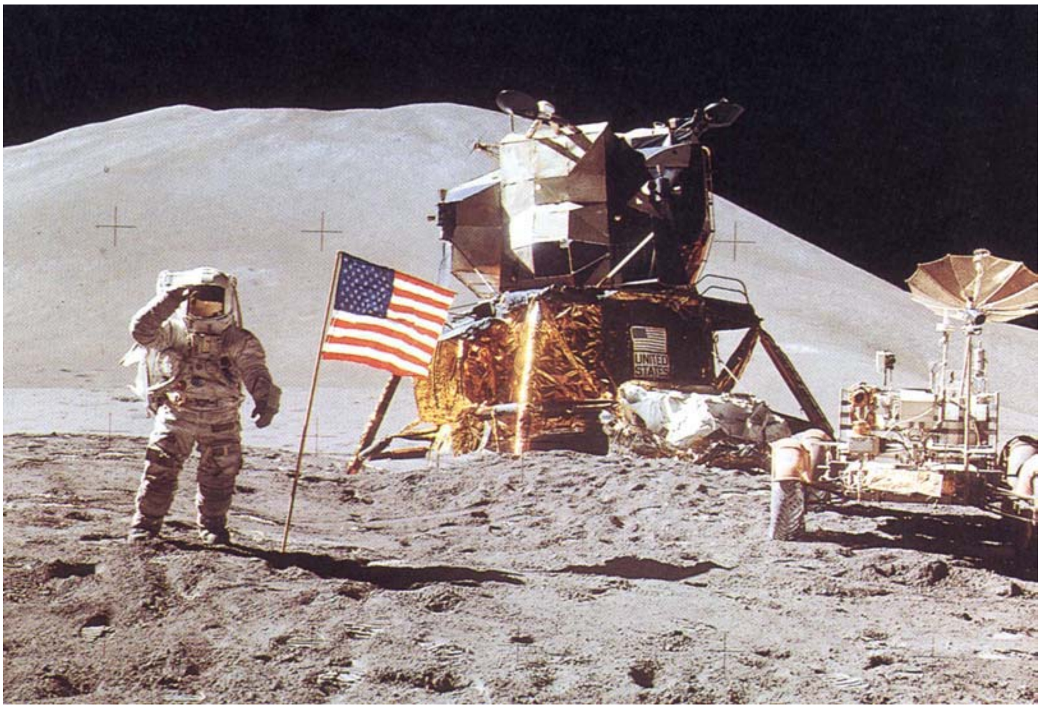
$$\overset{n}{w}\,(2)_{\underline{i}\bar{k}} = A^{00}\big(x^1(k), \xi^\mu(k)\big) + \xi_\mu(i)\xi^\mu(k) - A^{11}\big(x_1(i), \xi_\mu(i)\big) =$$

$$= U\big(S_k; a_k^1, \ldots, a_k^n\big) + A_{i\mu}a_k^\mu - H\big(S_i; A_{i1}, \ldots, A_{in}\big).$$

$$\boxed{\overset{n}{w}\,(2)_{\underline{i}\bar{i}} = U\big(S_i; a_i^1, \ldots, a_i^n\big) + A_{i\mu}a_i^\mu - H\big(S_i; A_{i1}, \ldots, A_{in}\big) \equiv 0.}$$

Литература к Примеру 16

[1]. Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинематика. М.; 1977, с. 97.



Человек на Луне. Следующая станция –
Мир Высшей реальности

Пример 17. Механика Лагранжа и механика Гамильтона

По традиции, идущей от "Теоретической физики" Ландау, в основание механики положен принцип наименьшего действия Гамильтона. Из него вытекает как следствие система дифференциальных уравнений второго порядка – система уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где

$$L(q^\mu, \dot{q}^\mu, t) = L(q^\mu, v^\mu, t) -$$

функция Лагранжа, частные производные которой по q^μ и v^μ имеют простой физический смысл:

$$\frac{\partial L}{\partial q^\mu}(q^\mu, v^\mu, t) = f_\mu, \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v^\mu}(q^\mu, v^\mu, t) = p_\mu, \tag{3}$$

где q^μ — обобщённая координата,
$v^\mu = \dot{q}^\mu$ — обобщённая скорость,
p_μ — обобщённый импульс,
$f_\mu = \dot{p}_\mu$ — обобщённая сила,
где точка над буквой служит обозначением производной по времени t.

Из равенств (2) и (3) следует:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q^\mu} dq^\mu + \frac{\partial L}{\partial v^\nu} v^\nu + \frac{\partial L}{\partial t} dt = f_\mu dq^\mu + p_\nu dv^\nu + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{4}$$

Равенство (4) можно переписать в виде:

$$dL = f_\mu dq^\mu + d(p_\nu v^\nu) - v^\nu dp_\nu + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

или

$$d(-L + p_\mu v^\mu) = dH = \frac{\partial H}{\partial q^\mu} dq^\mu + \frac{\partial H}{\partial p_\mu} dp_\mu + \frac{\partial H}{\partial t} dt = -f_\mu dq^\mu + v^\mu dp_\mu - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \tag{5}$$

где

$$H(q^\mu, p_\nu, t) = -L(q^\mu, v^\mu, t) + p_\mu v^\mu.$$

Равенство (4) может быть переписано в другом виде:

$$dL = d(f_\mu q^\mu) - q^\mu df_\mu + p_\mu dv^\mu + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

или

$$d(-L + f_\mu q^m) = q^\mu df_\mu - p_\mu dv^\mu - \frac{\partial L}{\partial t}dt = d\widetilde{H} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial f_\mu}df_\mu + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial v^\mu}dv^\mu - \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t}dt, \quad (6)$$

где

$$\widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t) = -L(q^\mu, v^\nu, t) + f_\mu q^\mu.$$

Наконец, перепишем равенство (4) в виде:

$$dL = d(f_\mu q^\mu) + d(p_\nu v^\nu) - q^\mu df_\mu - v_\nu dp_\nu + \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

или

$$d(-L + f_\mu q^\mu + p_\nu v^\nu) = q^\mu df_\mu + v^\nu dp_\nu - \frac{\partial L}{\partial t}dt =$$
$$= d\widetilde{U} = \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial f_\mu}df_\mu + \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial p_\nu}dp_\nu + \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t}dt, \quad (7)$$

где

$$\widetilde{U}(f_\mu, p_\nu, t) = -L(q^\mu, v^\nu, t) + f_\mu q^\mu + p_\nu v^\nu.$$

Таким образом, из равенств:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q^\mu}dq^\mu + \frac{\partial L}{\partial v^\nu}dv^\nu + \frac{\partial L}{\partial t}dt = f_\mu dq^\mu + p_\nu dv^\nu + \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^\mu}dq^\mu + \frac{\partial H}{\partial p_\nu}dp_\nu + \frac{\partial L}{\partial t}dt = -f_\mu dq^\mu + v_\nu dp^\nu + \frac{\partial H}{\partial t}dt$$

$$d\widetilde{H} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial f_\mu}df_\mu + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial v^\nu}dv^\nu + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t}dt = q^\mu df_\mu - p_\nu dv^\nu - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$d\widetilde{U} = \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial f_\mu}df_\mu + \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial p_\mu}dp_\mu + \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t}dt = q^\mu df_\mu + v^\nu dp_\nu - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

следует существование следующей системы равенств:

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial L}{\partial q^\mu}(q^\mu, v^\nu, t) = f_\mu & \dfrac{\partial L}{\partial v^\nu}(q^\mu, v^\nu, t) = p_\nu \\
\dfrac{\partial H}{\partial q^\mu}(q^\mu, p_\nu, t) = -f_\mu & \dfrac{\partial H}{\partial p_\nu}(q^\mu, p_\nu, t) = v^\nu \\
\dfrac{\partial \widetilde{H}}{\partial f_\mu}(f_\mu, v^\nu, t) = q^\mu & \dfrac{\partial \widetilde{H}}{\partial v^\nu}(f_\mu, v^\nu, t) = -p_\nu \\
\dfrac{\partial \widetilde{U}}{\partial f_\mu}(f_\mu, p_\nu, t) = q^\mu & \dfrac{\partial \widetilde{U}}{\partial p_\nu}(f_\mu, p_\nu, t) = v^\nu
\end{array} \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

где

$$\begin{aligned} &L(q^\mu, v^\nu, t) = L(q^\mu, v^\nu, t) \\ &H(q^\mu, v_\nu, t) = -L(q^\mu, v^\nu, t) + p_\nu v^\nu \\ &\widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t) = -L(q^\mu, v^\nu, t) + f_\mu q^\mu \\ &\widetilde{U}(f_\mu, p_\mu, t) = -L(q^\mu, v^\nu, t) f_\mu q^\mu + p_\nu v^\nu \end{aligned} \tag{9}$$

В итоге мы получили полную систему уравнений (8) и систему уравнений (9), обладающих определённой асимметрией.

Для устранения этой асимметрии введём новую функцию — **потенциальную энергию Лагранжа**[81] $U(q^\mu, v^\nu, t)$, равную функции Лагранжа $L(q^\mu, v^\nu, t)$, взятой с обратным знаком:

$$U(q^\mu, v^\nu, t) = -L(q^\mu, v^\nu, t).$$

После замены функции Лагранжа $L(q^\mu, v^\nu, t)$ на потенциальную энергию Лагранжа $U(q^\mu, v^\nu, t)$ полная система уравнений (8) и система равенств (9) примут следующий симметричный вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial q^\mu}(q^\mu, v^\nu, t) = -f_\mu &\qquad &\frac{\partial U}{\partial v^\nu}(q^\mu, v^\nu, t) = -p_\nu \\ &\frac{\partial H}{\partial q^\mu}(q^\mu, p_\nu, t) = -f_\mu &\qquad &\frac{\partial H}{\partial p_\nu}(q^\mu, p_\nu, t) = v^\nu \\ &\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial f_\mu}(f_\mu, v^\nu, t) = q^\mu &\qquad &\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial v^\nu}(f_\mu, v^\nu, t) = -p_\nu \\ &\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial f_\mu}(f_\mu, p_\nu, t) = q^\mu &\qquad &\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial p_\nu}(f_\mu, p_\nu, t) = v^\nu \end{aligned} \tag{10}$$

[81]Как будет показано ниже, потенциальная энергия Лагранжа $U(q^\mu, v^\nu, t)$ имеет более глубокий физический смысл, нежели функция Лагранжа $L(q^\mu, v^\nu, t)$.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t},$$

где

$U(q^m, v^\nu, t)$ — потенциальная энергия Лагранжа (механический аналог внутренней энергии $U(S, V)$,

$H(q^\mu, p_\nu, t)$ — функция Гамильтона (механический аналог энтальпии $H(S, P)$,

$\widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t)$ — дуально сопряжённая функция Гамильтона[82] (механический аналог свободной энергии $F(T, V)$),

$\widetilde{U}(f_\mu, p_\mu, t)$ — дуально сопряжённая потенциальная энергия Лагранжа (механический аналог энергии Гиббса $\Phi(T, P)$).

Но откуда берётся принцип наименьшего действия Гамильтона и вытекающее из него уравнение Лагранжа (1)?

Получим полную систему дуальносопряжёных уравнений (10) независимым путём из Теории физических структур.

При рассмотрении Примера 16, исходя из чрезвычайно общего **принципа сакральной симметрии**, лежащего в основании Теории физических структур, и опираясь на teorema egregium Михайличенко, мы смогли убедиться в существовании двух пар дуальносопряжённых сакральных потенциалов:

$$\big(A^{00}(x^\mu, \xi^\nu),\ \ A^{11}(x_\mu, \xi_\nu)\big) \quad \text{и} \quad \big(A^{01}(x^\mu, \xi_\nu),\ \ A^{10}(x_\mu, \xi^\nu)\big),$$

зависящих от двух групп соответствующих переменных:

$$\begin{array}{ll} x^1, \ldots, x^n & \xi^1, \ldots, \xi^n \\ x_1, \ldots, x_n & \xi_1, \ldots, \xi_n \end{array}$$

связанных между собой тремя соотношениями:

$$A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu + \xi_\nu \xi^\nu - A^{11}(x_\mu, \xi_\nu) = 0$$

$$A^{01}(x^\mu, \xi_\nu) + x_\mu x^\mu - \xi_\nu \xi^\nu - A^{10}(x_\mu, \xi^\nu) = 0$$
$$A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) - A^{01}(x^\mu, \xi_\nu) - A^{10}(x_\mu, \xi^\nu) + A^{11}(x_\mu, \xi_\nu) = 0,$$

[82] Сакральные потенциалы $\widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t)$ и $\widetilde{U}(f_\mu, p_\nu, t)$ неизвестны в традиционной аналитической механике. Они неизбежно возникают в теории физических структур как проявление сакральной симметрии.

и полученных $4m + 4n$ дуальносопряжённых уравнений, связывающих между собой $2m + 2n$ переменных $x^\mu,\ x_\mu,\ \xi^\nu,\ \xi_\nu$,

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi^\nu) = -x_\mu & \dfrac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu \\[2ex]
\dfrac{\partial A^{01}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi_\nu) = -x_\mu & \dfrac{\partial A^{01}}{\partial \xi_\nu}(x^\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu \\[2ex]
\dfrac{\partial A^{10}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi^\nu) = x^\mu & \dfrac{\partial A^{10}}{\partial \xi^\nu}(x_\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu \\[2ex]
\dfrac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi_\nu) = x^\mu & \dfrac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu}(x_\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu \\[2ex]
\mu = 1, 2, \ldots, m & \nu = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
$$

Механика Лагранжа и механика Гамильтона возникают как частный случай общей теории сакральных потенциалов, если положить

$$m = n \; (\mu = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

и дать анонимным физическим величинам

$x^\mu,\ x_\mu,\ \xi^\nu,\ \xi_\nu$ и сакральным потенциалам $(A^{00},\ A^{11})$ и $(A^{01},\ A^{01})$ следующую физическую интерпретацию:

$$
\begin{array}{ll}
x^1, \ldots, x^n = q^1, \ldots, q^n; & \xi^1, \ldots, \xi^n = v^1, \ldots, v^n, \\
x_1, \ldots, x_n = f_1, \ldots, f_n; & \xi_1, \ldots, \xi_n = p_1, \ldots, p_n,
\end{array}
$$

где

$$
\begin{gathered}
q^1, \ldots, q^n \text{ — обобщённые координаты,} \\
f_1, \ldots, f_n \text{ — обобщённые силы,} \\
v^1, \ldots, v^n \text{ — обобщённые скорости,} \\
p_1, \ldots, p_n \text{ — обобщённые импульсы} \\
A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) = U(q^\mu, v^\nu, t) \\
A^{01}(x^\mu, \xi_\nu) = H(q^\mu, p_\nu, t) \\
A^{10}(x_\mu, \xi^\nu) = \widetilde{H}(f_\mu, x^\nu, t) \\
A^{11}(x^\mu, \xi^\nu) = \widetilde{U}(f_\mu, p_\nu, t)
\end{gathered}
$$

Таким образом, сакральные потенциалы $U(q^\mu, v^\nu, t)$, $\widetilde{U}(f_\mu, p_\nu, t)$, $H(q^\mu, p_\nu, t)$,

$\widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t)$ связаны между собой тремя соотношениями,

$$U(q^\mu, v^\nu, t) + f_\mu q^\mu + p_\nu v^\nu - \widetilde{U}(f_\mu, p_\nu, t) = 0$$

$$H(q^\mu, p_\nu, t) + f_\mu q^\mu - p_\nu v^\nu - \widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t) = 0$$

$$U(q^\mu, v^\nu, t) - H(q^\mu, p_\nu, t) - \widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t) + \widetilde{U}(f_\mu, p_\nu, t) = 0,$$

порождают полную систему $4n{+}4n$ дуальносопряжённых уравнений, связывающих между собой $2n{+}2n$ физических величин $q^1, \ldots, q^n$; $f_1, \ldots, f_n$; $v^1, \ldots, v^n$; $p_1, \ldots, p_n$;

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial q^\mu}(q^\mu, v^\nu, t) = -f_\mu \quad && \frac{\partial U}{\partial v^\nu}(q^\mu, v^\nu, t) = -p_\nu \\
&\frac{\partial H}{\partial q^\mu}(q^\mu, p_\nu, t) = -f_\mu \quad && \frac{\partial H}{\partial p_\nu}(q^\mu, p_\nu, t) = v^\nu \\
&\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial f_\mu}(f_\mu, v^\nu, t) = q^\mu \quad && \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial v^\nu}(f_\mu, v^\nu, t) = -p_\nu \\
&\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial f_\mu}(f_\mu, p_\mu, t) = q^\mu \quad && \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial p_\nu}(f_\mu, p_\mu, t) = v^\nu
\end{aligned} \tag{10}$$

В отличие от термодинамики, не содержащей в себе времени, механика существенным образом включает в себя понятие времени t. Это находит своё выражение в $2n$ дополнительных связей:

$$v^\mu = \dot{q}^\mu$$

и

$$f_\mu = \dot{p}_\mu.$$

В результате система $8n$ алгебраических уравнений (10) превращается в систему $8n$ дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial q^\mu}(q^\mu, \dot{q}^\nu, t) = -\dot{p}_\mu \quad && \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\mu}(q^\mu, \dot{q}^\nu, t) = -p_\nu \\
&\frac{\partial H}{\partial q^\mu}(q^\mu, p_\nu, t) = -\dot{p}_\mu \quad && \frac{\partial H}{\partial p_\nu}(q^\mu, p_\nu, t) = -\dot{q}^\nu \\
&\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \dot{p}_\mu}(\dot{p}_\mu, \dot{q}^\nu, t) = q^\mu \quad && \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \dot{q}^n u}(\dot{p}_\mu, \dot{q}^\nu, t) = -p_\nu \\
&\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \dot{p}_\mu}(\dot{p}_\mu, p_\nu, t) = q^\mu \quad && \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial p_\nu}(\dot{p}_\mu, p_\nu, t) = \dot{q}^\mu.
\end{aligned} \tag{11}$$

Поскольку все системы $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка, порождаемые каждым сакральным потенциалом U, H, $\widetilde{H}$, $\widetilde{U}$, эквивалентны, то можно ограничиться системой $2n$ уравнений, порождаемой каким-либо одним сакральным потенциалом.

Если в качестве исходного потенциала взять потенциальную энергию Лагранжа $U(q^\mu, \dot{q}^\nu, t)$, то из уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial q^\mu}(q^\mu, \dot{q}^\nu, t) = -\dot{p}_\mu \qquad \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\mu}(q^\mu, \dot{q}^\nu, t) = -p_\nu$$

следует система n дифференциальных уравнений второго порядка – уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\mu}\right) - \frac{\partial U}{\partial q^\mu} = 0$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = 0.$$

Но если движение механической системы описывается уравнением Лагранжа, то легко показать, что в этом случае получается как следствие принцип наименьшего действия Гамильтона.

Если в качестве исходной взять функцию Гамильтона $H(q^\mu, p_\nu, t)$, то получим систему $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка — систему канонических уравнений Гамильтона:

$$\dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial q^\mu}(q^\mu, p_\mu, t)$$
$$\dot{q}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial p_\mu}(q^\mu, p_\mu, t)$$