Пример 10. Пространства постоянной кривизны

n -мерные пространства постоянной кривизны являются многообразиями, вложенными в $n+1$ -мерные линейные пространства.

n -мерное пространство постоянной положительной кривизны возникает на основе $n+1$ -мерного линейного пространства ${}^{n+1}\mathbb{R}_{n+1}$ с репрезентатором

$$\overset{n+1}{a}_{ik} = x(i)_1 x(k)_1 + \ldots + x(i)_n x(k)_n + x(i)_{n+1} x(k)_{n+1}$$

при наложении дополнительного условия

$$\overset{n+1}{a}_{ii} = R^2.$$

Таким образом, n -мерное пространство постоянной положительной кривизны S_n^+ (n -мерная эллиптическая геометрия Римана) реализуется на сфере вещественного радиуса R , вложенной в $n+1$ -мерное линейное пространство ${}^{n+1}\mathbb{R}_{n+1}$ с сигнатурой $(\underbrace{+\ldots++}_{n+1})$,

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = R^2.$$

В случае пространства постоянной положительной кривизны репрезентатор a_{ik} , равный скалярному произведению двух векторов $\vec{i}$ и $\vec{k}$, очевидным образом связаны с расстоянием ℓ_{ik}^+ между двумя точками i и k , лежащими на сфере радиуса R :

$$a_{ik} = R^2 \cos\varphi_{ik} = R^2 \cos\frac{\ell_{ik}^+}{R}.$$

Таким образом, в этом случае имеем следующее выражение для расстояния ℓ_{ik}^+ через декартовы координаты точек i и k :

$$R^2 \cos\frac{\ell_{ik}^+}{R} = x(i)_\mu x^\mu(k) + \sqrt{R^2 - x(i)_\mu x^\mu(k)}\sqrt{R^2 - x(k)_\mu x^\mu(k)}, \tag{1}$$

где $x(i)_\mu x^\mu(k) = x(i)_1 x(k)_1 + \ldots + x(i)_n x^\mu(k)_n$.
Введём понятие кривизны, как величины обратной квадрату радиуса сферы R ,

$$K = \frac{1}{R^2}$$

и перепишем соотношение (1) в виде:

$$\frac{1}{K}\cos\sqrt{K}\ell_{ik}^+ = x(i)_\mu x^\mu(k) + \sqrt{\frac{1}{K} - x(i)_\mu x^\mu(k)}\sqrt{\frac{1}{K} - x(k)_\mu x^\mu(k)}.$$

Чтобы перейти к пространству постоянной отрицательной кривизны, заменим знак кривизны K на обратный $(K \to -K)$. Получим:

$$\frac{1}{-K}\cos\sqrt{-K}\ell_{ik}^- = x(i)_\mu x^\mu(k) + \sqrt{-\frac{1}{K} - x(i)_\mu x^\mu(i)}\sqrt{-\frac{1}{K} - x(k)_\mu x^\mu(k)}$$

или

$$-\frac{1}{K}\cos i\sqrt{K}\ell_{ik}^{-} = x(i)_\mu x^\mu(k) - \sqrt{\frac{1}{K} + x(i)_\mu x^\mu(k)}\sqrt{\frac{1}{K} + x(k)_\mu x^\mu(k)}.$$

Замечая, что $\cos i\varphi = \operatorname{ch}\varphi$, и переходя от K к R^2, получим выражение для расстояния ℓ_{ik}^{-} между двумя точками i и k через их декартовы координаты в случае пространства постоянной отрицательной кривизны:

$$-R^2 \operatorname{ch}\frac{\ell_{ik}^{-}}{R} = x(i)_\mu x^\mu(k) - \sqrt{R^2 + x(i)_\mu x^\mu(k)}\sqrt{R^2 + x(k)_\mu x^\mu(k)}. \tag{2}$$

Полагая в (2) $i = k$, получим уравнение сферы мнимого радиуса, вложенной в линейное пространство ${}^n\mathbb{R}_{n+1}$ с сигнатурой $(\underbrace{+\ldots+-}_{n+1})$:

$$-R^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2,$$

на которой реализуется n-мерное пространство постоянной отрицательной кривизны S_n^- (n-мерная гиперболическая геометрия Лобачевского).

Рассмотрим несколько конкретных примеров:

А. Пространства постоянной положительной кривизны (Эллиптические пространства Римана)

1. *Одномерное пространство постоянной положительной кривизны*

Одномерное пространство постоянной положительной кривизны S_1^+ вложено в двумерное линейное пространство $\mathbb{R}^2$ с репрезентатором

$$\overset{2}{a}_{ik} = x_i x_k + y_i y_k$$

и верификатором $\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3; k_1 k_2 k_3}(a)$. Вложение осуществляется за счёт дополнительного условия:

$$\overset{2}{a}_{ii} = R^2.$$

Таким образом, пространство S_1^+ реализуется на окружности радиуса R

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

вложенной в двумерное линейное пространство $\mathbb{R}^2$.

Итак, при дополнительном условии $\overset{2}{a}_{ii} = R^2$ репрезентатор $\overset{2}{a}_{ik}$ имеет вид:

$$\overset{2}{a}_{ik} = R^2 \cos\frac{\ell_{ik}^{+}}{R} = x_i x_k + \sqrt{R^2 - x_i^2}\sqrt{R^2 - x_k^2}.$$

Сакральное тождество, связывающее расстояния ℓ^+_{ik}, измеренные вдоль окружности, между точками i_1, i_2, i_3 с одной стороны и точками k_1, k_2, k_3 — с другой, имеет следующий вид:

$$\forall i_1, i_2, i_3 \in \underline{\mathfrak{N}} \qquad \forall k_1, k_2, k_3 \in \overline{\mathfrak{M}};$$

$$\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3; k_1 k_2 k_3}(\overset{2}{a}) = R^6 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos\frac{\ell_{i_1k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1k_3}}{R} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\ell_{i_2k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2k_3}}{R} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\ell_{i_3k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3k_3}}{R} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= R^6 \begin{vmatrix} \cos\frac{\ell_{i_1k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1k_3}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_2k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2k_3}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_3k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3k_3}}{R} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

и в частности –

$$\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3; i_1 i_2 i_3}(\overset{2}{a}) = R^6 \begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\ell_{i_1i_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1i_3}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_2i_1}}{R} & 1 & \cos\frac{\ell_{i_2i_3}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_3i_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3i_2}}{R} & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Сакральная диаграмма, иллюстрирующая отношения между кортами $\langle i_1, i_2, i_3|$ и $|k_1, k_2, k_3\rangle$ приведена на рис. 1

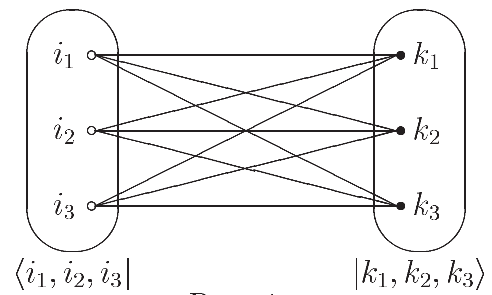


Рис. 1.

Из равенства

$$\cos\frac{\ell^+_{ik}}{R} = \frac{1}{R^2}(x_i x_k + \sqrt{R^2 - x_i^2}\sqrt{R^2 - x_k^2}) \tag{3}$$

получаем квадрат расстояния ds^2 между близкими точками, так как

$$\cos\frac{\ell^+_{ik}}{R} \approx 1 - \frac{ds^2}{2R^2}$$

то, переписывая соотношение (3) в виде

$$1 - \frac{ds^2}{2R^2} = \frac{1}{R^2}\Big(x(x+dx) + \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{R^2 - (x+dx)^2}\Big),$$

в конце концов получим:

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1 - \frac{x^2}{R^2}}. \tag{4}$$

Легко убедиться в том, что

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1 - \frac{x^2}{R^2}} = dx^2 + dy(x)^2 = dx^2 + (d\sqrt{R^2 - x^2})^2$$

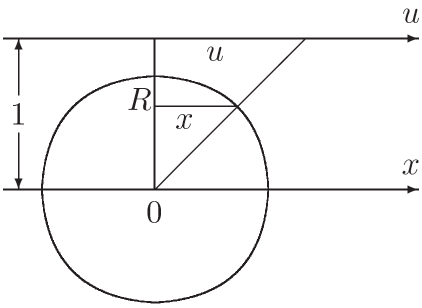


Рис. 2. Модель Кэли.

С помощью центральной проекции перейдём от декартовой координаты x к бельтрамиевой u (см. рис. 2.):

$$u = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

и обратно

$$x = R\frac{u}{1 + u^2}$$

В бельтрамиевых координатах метрика (4) имеет вид:

$$\boxed{ds^2 = R^2 \frac{du^2}{(1 + u^2)^2}}.$$

С помощью стереографической проекции перейдём от декартовой координаты x к координате Пуанкаре ξ (см. рис. 3.):

$$\xi = \frac{x}{R + \sqrt{R^2 - x^2}}$$

и обратно

$$x = R\frac{2\xi}{1 + \xi^2}.$$

В координатах Пуанкаре метрика (4) имеет вид:

$$\boxed{ds^2 = R^2 \frac{4d\xi^2}{(1 + \xi^2)^2}}$$

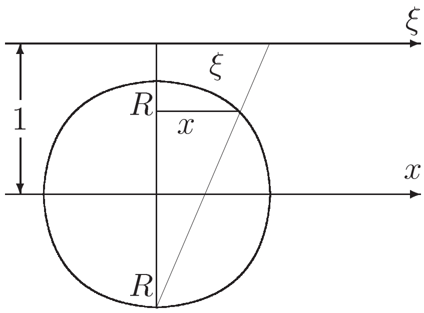


Рис. 3. Модель Пуанкаре.

Итак, имеет место следующая

Сакрально-инвариантная формулировка одномерной эллиптической геометрии Римана

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3;\ k_1 k_2 k_3}(\overset{2}{a}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{2}{a}_{ik} = R^2 \cos\frac{\lambda_{ik}}{R} = x_i x_k + \sqrt{R^2 - x_i^2}\,\sqrt{R^2 - x_k^2}\,.}$$

2. *Двумерное пространство постоянной положительной кривизны.*

Двумерное пространство постоянной положительной кривизны S_2^+ (двумерная эллиптическая геометрия Римана) вложено в трёхмерное линейное пространство $\mathbb{R}^3$ с репрезентатором

$$\overset{3}{a}_{ik} = x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k$$

и верификатором $\overset{4}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3 i_4; k_1 k_2 k_3 k_4}(a)$.

Вложение осуществляется за счёт дополнительного условия:

$$\overset{3}{a}_{ii} = R^2.$$

Таким образом, пространство S_2^+ реализуется на сфере радиуса R:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

вложенной в трёхмерное линейное пространство $\mathbb{R}^3$.

Итак, при дополнительном условии $\overset{3}{a}_{ii} = R^2$ репрезентатор $\overset{3}{a}_{ik}$ имеет вид:

$$\overset{3}{a}_{ik} = R^2 \cos\frac{\ell_{ik}^+}{R} = x_i x_k + y_i y_k + \sqrt{R^2 - x_i^2 - y_i^2}\sqrt{R^2 - x_k^2 - y_k^2}. \tag{5}$$

Сакральное тождество, связывающее расстояния ℓ_{ik}^+ , измеренные вдоль сферы между точками $\underline{i}_1, \underline{i}_2, \underline{i}_3, \underline{i}_4$, с одной стороны, и точками $\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4$ — с другой, имеет следующий вид:

$$\forall \underline{i}_1, \underline{i}_2, \underline{i}_3, \underline{i}_4 \in \underline{\mathfrak{N}} \qquad \forall \overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4 \in \overline{\mathfrak{M}}$$

$$\overset{4}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3i_4;k_1k_2k_3k_4}(\overset{3}{a}) = R^8 \begin{vmatrix} \cos\frac{\ell_{i_1k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1k_3}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1k_4}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_2k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2k_3}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2k_4}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_3k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3k_3}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3k_4}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_4k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_4k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_4k_3}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_4k_4}}{R} \end{vmatrix} \equiv 0$$

и, в частности,

$$\overset{4}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3i_4;i_1i_2i_3i_4}(\overset{3}{a}) = R^8 \begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\ell_{i_1i_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1i_3}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1i_4}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_2i_1}}{R} & 1 & \cos\frac{\ell_{i_2i_3}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2i_4}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_3i_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3i_2}}{R} & 1 & \cos\frac{\ell_{i_3i_4}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_4i_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_4i_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_4i_3}}{R} & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Сакральная диаграмма, иллюстрирующая отношения между кортами $\langle i_1, i_2, i_3, i_4|$ и $|k_1, k_2, k_3.k_4\rangle$, приведена на рис. 4.

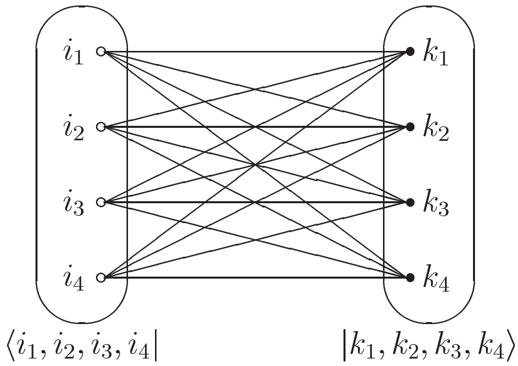


Рис. 4. Сакральная диаграмма отношений между кортами $\langle i_1, i_2, i_3, i_4|$ и $|k_1, k_2, k_3.k_4\rangle$.

Из равенства (5) находим метрику в декартовых координатах x и y :

$$\boxed{ds^2 = \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}\Big[(R^2 - y^2)dx^2 + 2xydxdy + (R^2 - x^2)dy^2\Big]}$$

С помощью центральной проекции (см. Рис. 2.) перейдём от декартовых координат x , y к бельтрамиевым u , v :

$$u = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \qquad\qquad x = R\frac{u}{1 + u^2 + v^2}$$

и обратно

$$v = \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \qquad\qquad y = R\frac{v}{1 + u^2 + v^2}$$

В бельтрамиевых координатах метрика (6) имеет вид:

$$\boxed{ds^2 = \frac{R^2}{(1 + u^2 + v^2)^2}\Big[(1 + v^2)du^2 - 2uvdudv + (1 + u^2)dv^2\Big]}$$

С помощью стереографической проекции (см. рис. 3) перейдём от декартовых координат x , y к изотермическим координатам Пуанкаре ξ , η :

$$\xi = \frac{x}{R + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \qquad\qquad x = R\frac{2\xi}{1+\xi^2+\eta^2}$$

и обратно

$$\eta = \frac{y}{R + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \qquad\qquad y = R\frac{2\eta}{1+\xi^2+\eta^2}$$

В изотермических координатах Пуанкаре метрика (6) имеет вид:

$$\boxed{ds^2 = \frac{4R^2}{(1+\xi^2+\eta^2)^2}(d\xi^2 + d\eta^2)}$$

Итак, имеет место следующая

Сакральная формулировка двумерной эллиптической геометрии Римана

$$\boxed{\overset{4}{\boldsymbol{K}}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3 i_4;\ k_1 k_2 k_3 k_4}(\overset{3}{a}) \equiv 0}$$

$$\boldsymbol{\overset{3}{a}_{ik} = R^2 \cos\frac{\lambda_{ik}}{R} = x_i x_k + y_i y_k + \sqrt{R^2 - x_i^2 - y_i^2}\,\sqrt{R^2 - x_k^2 - y_k^2}}\,.$$

B. Пространства постоянной отрицательной кривизны (Гиперболические геометрии Лобачевского)

1. *Одномерное пространство постоянной отрицательной кривизны*

Одномерное пространство постоянной отрицательной кривизны S_1^- вложено в двумерное линейное пространство ${}^1\mathbb{R}_2$ с репрезентатором

$$\overset{2}{a}_{ik} = x_i x_k - y_i y_k$$

и верификатором $\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3;k_1 k_2 k_3}(a)$.
Вложение осуществляется за счёт дополнительного условия:

$$\overset{2}{a}_{ii} = -R^2$$

Таким образом, пространство S_1^- реализуется на окружности мнимого радиуса iR :

$$x^2 - y^2 = -R^2,$$

вложенной в двумерное линейное пространство ${}^1\mathbb{R}_2$ с сигнатурой $(+-)$.

Итак, при дополнительном условии $\overset{2}{a}_{ii} = -R^2$, репрезентатор $\overset{2}{a}{}^-_{ik}$ имеет вид:

$$\overset{2}{a}{}^-_{ik} = -R^2 \operatorname{ch} \frac{\ell^-_{ik}}{R} = x_i x_k - \sqrt{R^2 + x_i^2}\sqrt{R^2 + x_k^2}. \tag{7}$$

Сакральное тождество, связывающее расстояние ℓ^-_{ik} между точками i_1, i_2, i_3 с одной стороны и точками k_1, k_2, k_3 — с другой, имеет вид:

$$\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3;k_1 k_2 k_3}(\overset{2}{a}) = (-1)^3 R^6 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1 k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1 k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1 k_3}}{R} & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2 k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2 k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2 k_3}}{R} & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3 k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3 k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3 k_3}}{R} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^3 R^6 \begin{vmatrix} \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1 k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1 k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1 k_3}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2 k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2 k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2 k_3}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3 k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3 k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3 k_3}}{R} \end{vmatrix} \equiv 0$$

и, в частности,

$$\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3;k_1 k_2 k_3}(\overset{2}{a}) == (-1)^3 R^6 \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1 k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1 k_3}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2 k_1}}{R} & 1 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2 k_3}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3 k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3 k_2}}{R} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Сакральная диаграмма, иллюстрирующая отношения между кортами $\langle i_1 i_2 i_3|$ и $k_1 k_2 k_3\rangle$, приведена на рис. 1.

Из равенства (7) получим квадрат расстояния ds^2 между близкими точками.

Так как $\operatorname{ch} \dfrac{\ell^-_{ik}}{R} \approx 1 + \dfrac{ds^2}{2R^2}$, то, переписывая равенство (7) в виде

$$R^2 + ds^2 = \sqrt{R^2 + x^2}\sqrt{R^2 + (x + dx)^2} - x(x + dx),$$

в конце концов получим:

$$ds^2 = R^2 \frac{dx^2}{R^2 + x^2}. \tag{8}$$

Легко убедиться в том, что

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1 + \frac{x^2}{R^2}} = dx^2 - dy(x)^2 = dx^2 - (d\sqrt{R^2 + x^2})^2.$$

Перейдём от декартовой координаты x к бельтрамиевой u:

$$u = \frac{dx^2}{1 + \frac{x^2}{R^2}} \quad \text{и обратно} \quad x = R\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

В бельтрамиевых координатах метрика (8) имеет вид:

$$ds^2 = R^2 \frac{du^2}{(1-u^2)^2}.$$

Перейдём от декартовой координаты x к координате Пуанкаре ξ:

$$\xi = \frac{x}{R - \sqrt{R^2 + x^2}} \quad \text{и обратно} \quad x = R\frac{2\xi}{1-\xi^2}.$$

В координатах Пуанкаре метрика (8) имеет вид:

$$ds^2 = \frac{4R^2 d\xi^2}{(1-\xi^2)^2}.$$

Итак, имеет место следующая

Сакральная формулировка одномерной гиперболической геометрии

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3;\ k_1 k_2 k_3}(\overset{2}{a}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{2}{a}_{ik}} = \boldsymbol{-R^2 \operatorname{ch} \frac{\lambda_{ik}}{R} = x_i x_k - \sqrt{R^2 - x_i^2}\,\sqrt{R^2 - x_k^2}}\,.$$

2. *Двумерное пространство постоянной отрицательной кривизны*

Двумерное пространство постоянной отрицательной кривизны S_2^- (двумерная гиперболическая геометрия Лобачевского) вложено в трёхмерное линейное пространство ${}^2\mathbb{R}_3$ с репрезентатором

$$\overset{3}{a}_{ik} = x_i x_k + y_i y_k - z_i z_k$$

и верификатором $\overset{4}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3 i_4; k_1 k_2 k_3 k_4}(a)$.

Вложение осуществляется за счёт дополнительного условия:

$$\overset{3}{a}_{ii}= -R^2.$$

Таким образом, пространство S_2^+ реализуется на сфере мнимого радиуса $i\,R$:

$$x^2 + y^2 - z^2 = -R^2,$$

вложенной в трёхмерное линейное пространство ${}^2\mathbb{R}_3$ с сигнатурой $(+ + -)$.

Итак, при дополнительном условии $\overset{3}{a}_{ii}= -R^2$ репрезентатор $\overset{3}{a}{}^{-}_{ik}$ имеет вид:

$$\overset{3}{a}_{ik}= -R^2 \operatorname{ch} \frac{\ell^-_{ik}}{R} = x_i x_k + y_i y_k - \sqrt{R^2 + x_i^2 + y_i^2}\,\sqrt{R^2 + x_k^2 + y_k^2}. \tag{5}$$

Сакральное тождество, связывающее расстояния ℓ^-_{ik} , измеренные вдоль сферы мнимого радиуса между точками $\underline{i}_1, \underline{i}_2, \underline{i}_3, \underline{i}_4$ с одной стороны и точками $\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4$ — с другой, имеет следующий вид:

$$\forall \underline{i}_1, \underline{i}_2, \underline{i}_3, \underline{i}_4 \in \underline{\mathfrak{N}} \qquad \forall \overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4 \in \overline{\mathfrak{M}}$$

$$\overset{4}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3 i_4; k_1 k_2 k_3 k_4}\Big(\operatorname{ch}\frac{\ell^-}{R}\Big) = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_3}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_4}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_3}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_4}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_3}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_4}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4k_3}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4k_4}}{R} \end{vmatrix} \equiv 0$$

и, в частности,

$$\overset{4}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3 i_4; i_1 i_2 i_3 i_4}\Big(\operatorname{ch}\frac{\ell^-}{R}\Big) = \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1i_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1i_3}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1i_4}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2i_1}}{R} & 1 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2i_3}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2i_4}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3i_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3i_2}}{R} & 1 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3i_4}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4i_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4i_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4i_3}}{R} & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Сакральная диаграмма, иллюстрирующая отношения между кортами $\langle i_1, i_2, i_3, i_4|$ и $|k_1, k_2, k_3.k_4\rangle$, приведена на рис. 4

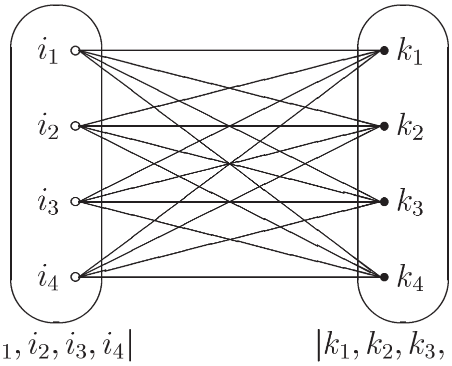


Рис. 4. Сакральная диаграмма отношений между кортами $\langle i_1, i_2, i_3, i_4|$ и $|k_1, k_2, k_3.k_4\rangle$.

Из равенства (5) находим метрику в декартовых координатах x и y:

$$\boxed{ds^2 = \frac{1}{R^2+x^2+y^2}\Big[(R^2+y^2)dx^2 - 2xydxdy + (R^2+x^2)dy^2\Big]}$$

С помощью центральной проекции (см. Рис. 2.) перейдём от декартовых координат x, y к бельтрамиевым u, v:

$$u = \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2+y^2}} \qquad x = R\frac{u}{1-u^2-v^2}$$

и обратно

$$v = \frac{y}{\sqrt{R^2+x^2+y^2}} \qquad y = R\frac{v}{1-u^2-v^2}$$

В бельтрамиевых координатах метрика (6) имеет вид:

$$\boxed{ds^2 = \frac{R^2}{(1-u^2-v^2)^2}\Big[(1-v^2)du^2 + 2uvdudv + (1-u^2)dv^2\Big]}$$

С помощью стереографической проекции (см. рис. 3) перейдём от декартовых координат x, y к изотермическим координатам Пуанкаре ξ, η:

$$\xi = \frac{x}{R+\sqrt{R^2+x^2+y^2}} \qquad x = R\frac{2\xi}{1-\xi^2-\eta^2}$$

и обратно

$$\eta = \frac{y}{R+\sqrt{R^2+x^2+y^2}} \qquad y = R\frac{2\eta}{1-\xi^2-\eta^2}$$

В изотермических координатах Пуанкаре метрика (6) имеет вид:

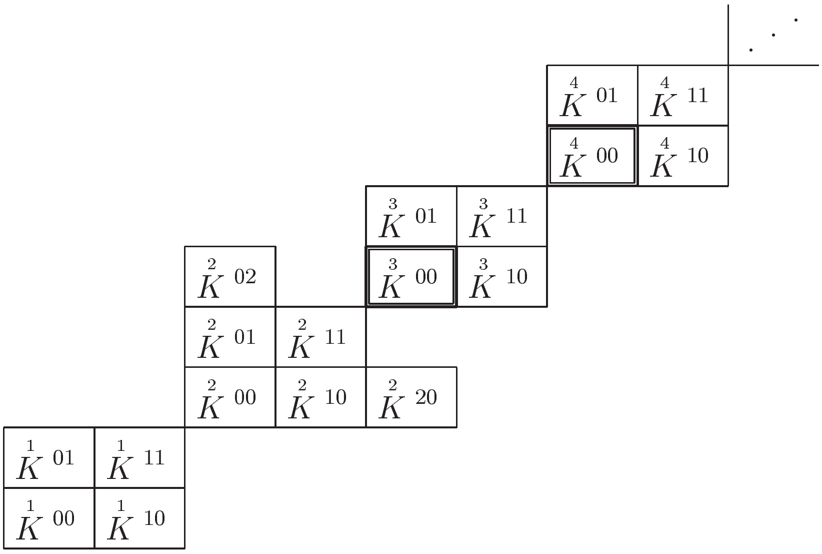
$$\boxed{ds^2 = \frac{4R^2}{(1-\xi^2-\eta^2)^2}(d\xi^2 + d\eta^2)}$$

Итак, имеет место следующая

Сакральная формулировка двумерной геометрии Лобачевского

$$\boxed{\boxed{\overset{4}{\boldsymbol{K}}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3 i_4;\ k_1 k_2 k_3 k_4}(\overset{3}{a}) \equiv 0}}$$

$$\overset{3}{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{ik}} = \ -\operatorname{\mathbf{ch}}\frac{\boldsymbol{\lambda_{ik}}}{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{x_i x_k + y_i y_k - \sqrt{R^2 + x_i^2 + y_i^2}\,\sqrt{R^2 + x_k^2 + y_k^2}}\ )\ .$$



Места четырёх физических структур, выражающих сущность двух одномерных и двух двумерных пространств постоянной положительной и отрицательной кривизны, среди всех возможных физических структур.

Итак, мы видим, что геометрии n-мерных пространств постоянной кривизны (эллиптическая геометрия Римана и гиперболическая геометрия Лобачевского) могут быть последовательно и строго получены из Теории физических структур по следующей схеме:

1. Исходим из физической структуры ранга (r, r).

Исходное сакральное тождество имеет вид:

$$\forall i_1 \dots i_n \in \underline{\mathfrak{N}} \quad \forall k_1 \dots k_n \in \overline{\mathfrak{M}}$$

$$\begin{array}{l} \Phi(\varphi_{i_1k_1}, \dots, \varphi_{i_1k_r}, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad \varphi_{i_rk_1}, \dots, \varphi_{i_rk_r}) \end{array} = 0$$

1. У этого сакрального уравнения имеется два, и только два, решения – мультипликативное

$$\varphi^{(1)}_{ik} = \overset{r-1}{a}_{ik} = \varepsilon_1 x(i)_1 x^1(k) + \dots + \varepsilon_{r-1} x(i)_{r-1} x^{r-1}(k)$$

$$\overset{r}{K}{}^{00}_{i_1\ldots i_r;k_1\ldots k_r}(a) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & a_{i_1k_1} & \dots & a_{i_1k_r} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i_rk_1} & \dots & a_{i_rk_r} & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r}{K}{}^{00}_{i_1\dots i_r;k_1\dots k_r}(\overset{r-1}{a}) \equiv 0$$

и аддитивное

$$\varphi^{(2)}_{ik} = \overset{r-2}{w}_{ik} = x^0(k) + \varepsilon_1 x(i)_1 x^1(k) + \dots + \varepsilon_{r-2} x(i)_{r-2} x^{r-2}(k) + x(i)_0$$

$$\overset{r-1}{K}{}^{11}_{i_1\dots i_r;k_1\dots k_r}(w) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & w_{i_1k_1} & \dots & w_{i_1k_{r-1}} & w_{i_1k_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & w_{i_{r-1}k_1} & \dots & w_{i_{r-1}k_r} & 0 \\ -1 & w_{i_rk_1} & \dots & w_{i_rk_{r-1}} & w_{i_rk_r} \end{vmatrix}$$

$$\overset{r-1}{K}{}^{11}_{i_1\dots i_r;k_1\dots k_r}(\overset{r-2}{w}) \equiv 0$$

$$\varepsilon = \pm 1$$

3. Выбирая мультипликативное решение $(r-1=n)$ и накладывая дополнительное условие,

$$\overset{n}{a}_{ik} = \overset{n}{a}_{ki},$$

получаем линейную алгебру (геометрию n-мерного линейного пространства) со скалярным произведением

$$\overset{n}{a}_{ik} = g_{\mu\nu} x^\mu(i) x^\nu(k),$$

4. Накладывая на скалярное произведение ещё одно дополнительное условие,

$$\overset{n}{a}_{ii} = \varepsilon R^2,$$

получим в случае $\varepsilon = 1$ геометрию n-мерного пространства постоянной положительной кривизны, а в случае $\varepsilon = -1$ — геометрию n-мерного пространства постоянной отрицательной кривизны.

Пример 11. Малые колебания

Уверенность в том, что явление природы с необходимостью следует закону причинности, в конечном счете основывается лишь на скромных успехах, достигнутых в результате попыток человеческого разума установить взаимосвязь между явлениями природы.

— Альберт Эйнштейн.

Из приведенных выше примеров может сложиться впечатление, что связь между расстояниями, пройденными различными телами за одни и те же промежутки времени, представляет собой достаточно частное явление и имеет место только в простых "школьных" примерах. Чтобы рассеять это впечатление, рассмотрим еще два примера:

1. Малые колебания математического маятника

Рассмотрим множество одинаковых маятников $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$, приведенных в движение с произвольными начальными отклонениями и скоростями в какой-то общий момент времени t_i, где $i \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ – множество произвольных событий.

Закон движения маятника хорошо известен:

$$\theta_\alpha(i) = a_\alpha \sin(\omega t_i + \varphi_\alpha) = a_\alpha \cos\varphi_\alpha \sin\omega t_i + a_\alpha \sin\varphi_\alpha \cos\omega t_i.$$

И в этом случае можно воспользоваться тем же самым приёмом, с помощью которого мы доказывали существование нужных соотношений в предыдущих примерах. А именно, легко показать, что определитель третьего порядка, составленный из измеряемых на опыте углов отклонений трех произвольных маятников в три произвольные, но общие для всех маятников, моменты времени, представляет собой произведение двух определителей, каждый из которых тождественно равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \theta_\alpha(i) & \theta_\alpha(k) & \theta_\alpha(m) \\ \theta_\beta(i) & \theta_\beta(k) & \theta_\beta(m) \\ \theta_\gamma(i) & \theta_\gamma(k) & \theta_\gamma(m) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_\alpha \cos\varphi_\alpha & a_\alpha \sin\varphi_\alpha & 0 \\ a_\beta \cos\varphi_\beta & a_\beta \sin\varphi_\beta & 0 \\ a_\gamma \cos\varphi_\gamma & a_\gamma \sin\varphi_\gamma & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sin\omega t_i & \sin\omega t_k & \sin\omega t_m \\ \cos\omega t_i & \cos\omega t_k & \cos\omega t_m \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

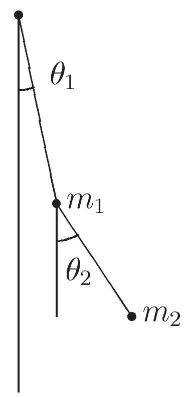
Итак, мы можем утверждать, что между малыми углами отклонения одинаковых маятников, приведенных в движение в один общий момент времени с произвольными начальными отклонениями и скоростями, существует следующая связь:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{N}, \qquad \forall i, k, m \in \mathfrak{M}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\overset{3}{\boldsymbol{K}}{}^{\mathbf{00}}_{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma;ikm}}(\overset{2}{\boldsymbol{\theta}}) = \\ = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta_\alpha(i)} & \boldsymbol{\theta_\alpha(k)} & \boldsymbol{\theta_\alpha(m)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta_\beta(i)} & \boldsymbol{\theta_\beta(k)} & \boldsymbol{\theta_\beta(m)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta_\gamma(i)} & \boldsymbol{\theta_\gamma(k)} & \boldsymbol{\theta_\gamma(m)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} \equiv \mathbf{0}\end{gathered}}$$

2. Малые колебания двойного маятника

В качестве следующего примера рассмотрим колебательную систему α , обладающую двумя степенями свободы, например, двойной маятник [1].



Как известно, движение каждой точки этой системы представляет собой определенную суперпозицию двух нормальных колебаний с собственными частотами ω_1 и ω_2 , т. е. малое отклонение какой-либо точки этой системы (от положения равновесия) может быть записано в виде:

$$\theta^1_\alpha(i) = a^1_\alpha \sin(\omega_1 t_i + \varphi^1_\alpha) + b^1_\alpha \sin(\omega_2 t_i + \psi^1_\alpha)$$

$$\theta^2_\alpha(i) = a^2_\alpha \sin(\omega_1 t_i + \varphi^2_\alpha) + b^2_\alpha \sin(\omega_2 t_i + \psi^2_\alpha)$$

или

$$\theta^\mu_\alpha(i) = a^\mu_\alpha \cos\varphi^\mu_\alpha \sin\omega_1 t_i + a^\mu_\alpha \sin\varphi^\mu_\alpha \cos\omega_1 t_i + b^\mu_\alpha \cos\psi^\mu_\alpha \sin\omega_2 t_i + b^\mu_\alpha \sin\psi^\mu_\alpha \cos\omega_2 t_i,$$

где $\mu = 1, 2.$

Тогда можно снова воспользоваться тождеством,

$$\begin{vmatrix} \theta_\alpha(i) & \theta_\alpha(k) & \theta_\alpha(m) & \theta_\alpha(n) & \theta_\alpha(p) \\ \theta_\beta(i) & \theta_\beta(k) & \theta_\beta(m) & \theta_\beta(n) & \theta_\beta(p) \\ \theta_\gamma(i) & \theta_\gamma(k) & \theta_\gamma(m) & \theta_\gamma(n) & \theta_\gamma(p) \\ \theta_\delta(i) & \theta_\delta(k) & \theta_\delta(m) & \theta_\delta(n) & \theta_\delta(p) \\ \theta_\varepsilon(i) & \theta_\varepsilon(k) & \theta_\varepsilon(m) & \theta_\varepsilon(n) & \theta_\varepsilon(p) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_\alpha \cos\varphi_\alpha & a_\alpha \sin\varphi_\alpha & b_\alpha \cos\psi_\alpha & b_\alpha \sin\psi_\alpha & 0 \\ a_\beta \cos\varphi_\beta & a_\beta \sin\varphi_\beta & b_\beta \cos\psi_\beta & b_\beta \sin\psi_\beta & 0 \\ a_\gamma \cos\varphi_\gamma & a_\gamma \sin\varphi_\gamma & b_\gamma \cos\psi_\gamma & b_\gamma \sin\psi_\gamma & 0 \\ a_\delta \cos\varphi_\delta & a_\delta \sin\varphi_\delta & b_\delta \cos\psi_\delta & b_\delta \sin\psi_\delta & 0 \\ a_\varepsilon \cos\varphi_\varepsilon & a_\varepsilon \sin\varphi_\varepsilon & b_\varepsilon \cos\psi_\varepsilon & b_\varepsilon \sin\psi_\varepsilon & 0 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \sin\omega_1 t_i & \sin\omega_1 t_k & \sin\omega_1 t_m & \sin\omega_1 t_n & \sin\omega_1 t_p \\ \cos\omega_1 t_i & \cos\omega_1 t_k & \cos\omega_1 t_m & \cos\omega_1 t_n & \cos\omega_1 t_p \\ \sin\omega_2 t_i & \sin\omega_2 t_k & \sin\omega_2 t_m & \sin\omega_2 t_n & \sin\omega_2 t_p \\ \cos\omega_2 t_i & \cos\omega_2 t_k & \cos\omega_2 t_m & \cos\omega_2 t_n & \cos\omega_2 t_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

и записать соотношение, связывающее между собой отклонения от положения равновесия какой-либо одной точки у различных систем $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, взятых в различные моменты времени i, k, m, n, p в виде:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathfrak{N}, \qquad \forall i, k, m, n, p \in \mathfrak{M}, \qquad \mu = 1, 2$$

$$\boxed{\begin{gathered} \overset{5}{\boldsymbol{K}}{}^{\mathbf{00}}_{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon;ikmnp}}(\overset{4}{\boldsymbol{\theta}}{}^{\boldsymbol{\mu}}) = \\ = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta^\mu_\alpha(i)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\alpha(k)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\alpha(m)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\alpha(n)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\alpha(p)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta^\mu_\beta(i)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\beta(k)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\beta(m)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\beta(n)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\beta(p)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta^\mu_\gamma(i)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\gamma(k)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\gamma(m)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\gamma(n)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\gamma(p)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta^\mu_\delta(i)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\delta(k)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\delta(m)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\delta(n)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\delta(p)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta^\mu_\varepsilon(i)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\varepsilon(k)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\varepsilon(m)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\varepsilon(n)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\varepsilon(p)} & \mathbf{)0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \mathbf{0}. \end{gathered}}$$

Легко обобщить этот результат на случай колебательных систем с k степенями свободы:

Для множества

$$\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\},$$

состоящего из одинаковых колебательных систем с k степенями свободы, приведенных в движение в какой-то общий для всех момент времени с произвольными начальными координатами $\theta^{\mu}_{\alpha}(0)$ и скоростями $\dot{\theta}^{\mu}_{\alpha}(0)$, существует следующее соотношение, связывающее значение одной и той же μ-й координаты θ^{μ} для различных систем в разные моменты времени

Сакральная формулировка теории колебаний

$$\forall \alpha_1 \ldots \alpha_{2k+1} \in \mathfrak{N}, \qquad \forall i_1 \ldots i_{2k+1} \in \mathfrak{M}$$

$$\boxed{\overset{2k+1}{\boldsymbol{K}}{}^{00}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2k+1}; i_1 \ldots i_{2k+1}}(\overset{2k}{\boldsymbol{\theta}}{}^{\mu}) = \mathbf{0}.}$$

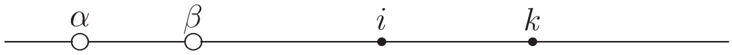
Литература к Примеру 11

[1]. *Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М.* Механика, том I, Наука, М.: 1973, С. 21.

Пример 12. Ангармоническое отношение

Начнём с простейшего понятия, с расстояния между двумя точками i и k, лежащими на прямой,

$$(i\,k) = \ell_{ik}$$



Введём следующие обозначения:

$$(\alpha;\, ik) = \ell_{\alpha;ik} = \ell_{\alpha i} - \ell_{\alpha k}$$
$$(\beta;\, ik) = \ell_{\beta;ik} = \ell_{\beta i} - \ell_{\beta k},$$

где α и β — две фиксированные точки на прямой.

Условие инвариантности расстояния ℓ_{ik} запишется в виде:

$$(\alpha;\, ik) = (\beta;\, ik)$$

или

$$\ell_{\alpha i} - \ell_{\alpha k} - \ell_{\beta i} + \ell_{\beta k} = 0. \tag{1}$$

Легко видеть, что сакральное тождество (1) может быть записано в виде:

$$\ell_{\alpha i} - \ell_{\alpha k} - \ell_{\beta i} + \ell_{\beta k} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \ell_{\alpha i} & \ell_{\alpha k} \\ -1 & \ell_{\beta i} & \ell_{\beta k} \end{vmatrix} =$$
$$= \overset{1}{K}{}^{11}_{\alpha\beta;\,ik}(\overset{\circ}{w}) \equiv 0,$$

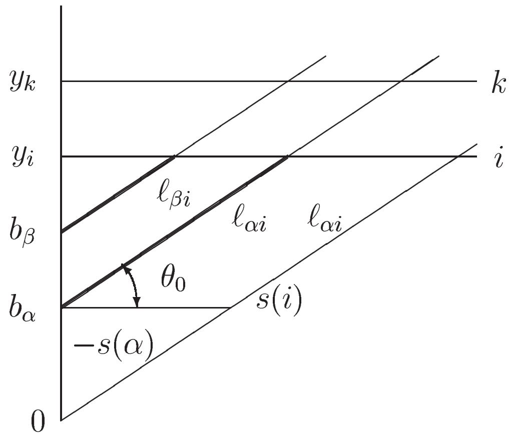
где

$$\overset{\circ}{w}_{\alpha i} = \ell_{\alpha i} = \frac{y_i - b_\alpha}{\sin\theta_0} = \overline{s}(i) + \underline{s}(\alpha).$$

$\overline{s}(i) = \dfrac{y_i}{\sin\theta_0}$ – скрытый параметр текущей точки i;

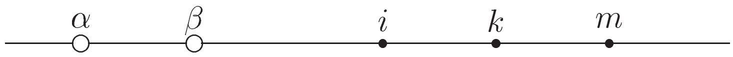
$\underline{s}(\alpha) = \dfrac{-b_\alpha}{\sin\theta_0}$ – скрытый параметр фиксированной точки α.

Тождество (1) допускает следующую геометрическую интерпретацию:



Итак, за понятием расстояния между двумя точками, лежащими на прямой (ik) , скрывается свойство аддитивности (см. Пример 5), находящее свое выражение в существовании физической структуры рода $\overset{1}{K}{}^{11}_{\alpha\beta;ik}(\mathring{w}) \equiv 0$.

Рассмотрим далее три точки i, k, m , лежащие на прямой



и введём новое понятие гармонического (простого) отношения между тремя точками:

$$(i\,k\,m) = \frac{\ell_{im}}{\ell_{mk}}.$$

Что скрывается за гармоническим отношением $(i\,k\,m)$?

Введём следующее обозначение:

$$(\alpha; ikm) = \frac{\ell_{\alpha;im}}{\ell_{\alpha;mk}} = \frac{\ell_{\alpha i} - \ell_{\alpha m}}{\ell_{\alpha m} - \ell_{\alpha k}}.$$

Условие инвариантности гармонического отношения записывается в виде:

$$(\alpha;\, ikm) = (\beta;\, ikm)$$

или

$$\frac{\ell_{\alpha;\,im}}{\ell_{\alpha;\,mk}} - \frac{\ell_{\beta;\,im}}{\ell_{\beta;\,mk}} = \frac{\ell_{\alpha;\,im}\ell_{\beta;\,mk} - \ell_{\alpha;\,mk}\ell_{\beta;\,ik}}{\ell_{\alpha;\,mk}\ell_{\beta;\,mk}} = 0. \tag{2}$$

Но легко видеть, что это сакральное тождество (2) можно записать в виде:

$$(\alpha;\, ikm) - (\beta;\, ikm) = \frac{(\ell_{\alpha i} - \ell_{\alpha m})(\ell_{\beta m} - \ell_{\beta k}) - (\ell_{\alpha m} - \ell_{\alpha k})(\ell_{\beta i} - \ell_{\beta k})}{\ell_{\alpha;\,mk}\ell_{\beta;\,mk}} =$$

$$= \ell^{-1}_{\alpha;\,km}\ell^{-1}_{\beta;\,km} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \ell_{\alpha i} & \ell_{\alpha k} & \ell_{\alpha m} \\ \ell_{\beta i} & \ell_{\beta k} & \ell_{\beta m} \end{vmatrix} \equiv 0$$

То есть

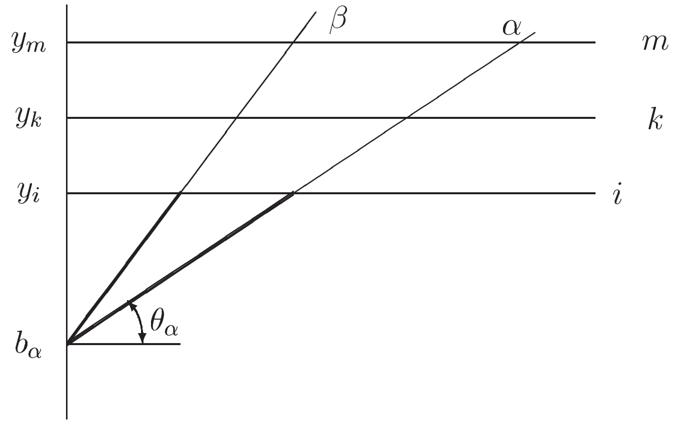
$$\ell_{\alpha;\,km}\ell_{\beta;\,km}\big[(\alpha;\,ikm)-(\beta;\,ikm)\big]=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\0&\ell_{\alpha i}&\ell_{\alpha k}&\ell_{\alpha m}\\0&\ell_{\beta i}&\ell_{\beta k}&\ell_{\beta m}\\-1&0&0&0\end{vmatrix}=$$

$$=\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\beta;\,ikm}(\overset{1}{u})\equiv 0, \qquad (3)$$

где

$$\overset{1}{u}_{\alpha i}=\ell_{\alpha i}=\frac{y_i-b_\alpha}{\sin\theta_\alpha}=\xi_\alpha x_i+\underline{s}(\alpha),$$
$$\xi_\alpha=\frac{1}{\sin\theta_\alpha},$$
$$x_i=y_i,$$
$$\underline{s}(\alpha)=\frac{-b_\alpha}{\sin\theta_\alpha}.$$

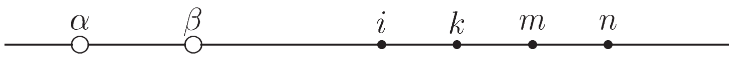
Тождество (3) допускает следующую геометрическую интерпретацию:



Итак, за понятием гармонического отношения трёх точек $(i\;k\;m)$ скрывается свойство аддитивности и подобия, находящее свое выражение в существовании физической структуры рода

$$\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\beta;\,ikm}(\overset{1}{u})\equiv 0.$$

Рассмотрим, наконец, четыре точки i,k,m,n , лежащие на прямой



и введём новое понятие ангармонического (двойного) отношения между четырьмя точками. Введём следующее обозначение:

$$(\alpha;\,ikmn)=\frac{\ell_{\alpha;\,im}\ell_{\alpha;\,kn}}{\ell_{\alpha;\,in}\ell_{\alpha;\,km}}.$$

Условие инвариантности ангармонического отношения записывается в виде:

$$(\alpha;\, ikmn) = (\beta;\, ikmn)$$

или

$$\frac{\ell_{\alpha;\,im}\ell_{\alpha;\,kn}}{\ell_{\alpha;\,in}\ell_{\alpha;\,km}} - \frac{\ell_{\beta;\,im}\ell_{\beta;\,kn}}{\ell_{\beta;\,in}\ell_{\beta;\,km}} =$$
$$\frac{1}{\ell_{\alpha;\,in}\ell_{\alpha;\,km}\ell_{\beta;\,in}\ell_{\beta;\,km}}\big[(\ell_{\alpha i}-\ell_{\alpha m})(\ell_{\alpha k}-\ell_{\alpha n})(\ell_{\beta i}-\ell_{\beta n})(\ell_{\beta k}-\ell_{\beta m}) -$$
$$-(\ell_{\alpha i}-\ell_{\alpha n})(\ell_{\alpha k}-\ell_{\alpha m})(\ell_{\beta i}-\ell_{\beta m})(\ell_{\beta k}-\ell_{\beta n})\big] \equiv 0.$$

Выражение в квадратных скобках может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}&(\ell_{\alpha i}-\ell_{\alpha m})(\ell_{\alpha k}-\ell_{\alpha n})(\ell_{\beta i}-\ell_{\beta n})(\ell_{\beta k}-\ell_{\beta m}) -\\ &-(\ell_{\alpha i}-\ell_{\alpha n})(\ell_{\alpha k}-\ell_{\alpha m})(\ell_{\beta i}-\ell_{\beta m})(\ell_{\beta k}-\ell_{\beta n}) =\\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ \ell_{\alpha i} & \ell_{\alpha k} & \ell_{\alpha m} & \ell_{\alpha n}\\ \ell_{\beta i} & \ell_{\beta k} & \ell_{\beta m} & \ell_{\beta n}\\ \ell_{\alpha i}\ell_{\beta i} & \ell_{\alpha k}\ell_{\beta k} & \ell_{\alpha m}\ell_{\beta m} & \ell_{\alpha n}\ell_{\beta n}\end{vmatrix} = \overset{2}{M}{}^{02}_{\alpha\beta;\,ikmn}(\overset{1}{p}) \equiv 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Эту связь физической структуры ранга (2, 4) с проективно инвариантным ангармоническим отношением впервые обнаружил мой ученик Владимир Хананович Лев [1].

Сакральное тождество (4) допускает следующую геометрическую интерпретацию:

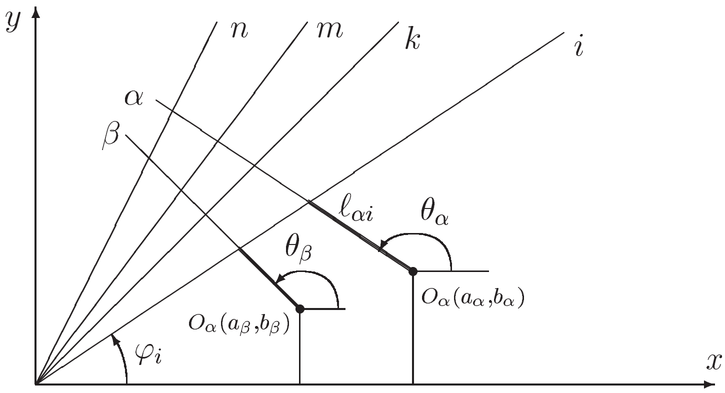


Рис. 1. Два множества прямых $\overline{\mathfrak{M}}$ и $\underline{\mathfrak{N}}$.

В качестве репрезентатора $\ell_{\alpha i}$, характеризующего отношение между прямой $i \in \overline{\mathfrak{M}}$ и прямой $\alpha \in \underline{\mathfrak{N}}$, возьмём расстояние от точки (a_α, b_α) до точки пересечения прямой α с прямой i.

Каждая прямая i из множества $\overline{\mathfrak{M}}$ характеризуется **одним** параметром, углом φ_i, а каждая прямая α из множества $\underline{\mathfrak{N}}$ характеризуется **тремя** параметрами, двумя декартовыми координатами a_α, b_α точки (a_α, b_α) и углом θ_α.

Из рис. 1. следует, что

$$\ell_{\alpha i} = \frac{-\dfrac{a_\alpha}{\cos\theta_\alpha}\operatorname{tg}\varphi_i + \dfrac{b_\alpha}{\cos\theta_\alpha}}{\operatorname{tg}\varphi_i - \operatorname{tg}\theta_\alpha} = \frac{\xi_\alpha x_i + \sigma_\alpha}{x_i + \lambda_\alpha},$$

где

$$\xi_\alpha = -\frac{a_\alpha}{\cos\theta_\alpha}$$

$$\sigma_\alpha = \frac{b_\alpha}{\cos\theta_\alpha}$$

$$\lambda_\alpha = -\operatorname{tg}\theta_\alpha$$

$$x_i = \operatorname{tg}\varphi_i.$$

Итак, за понятием ангармонического (двойного) отношения четырёх точек $(i\,k\,m\,n)$ скрывается проективный инвариант, находящий своё выражение в существовании спорадической физической структуры ранга (2,4):

$$\overset{2}{M}{}^{02}_{\alpha\beta;\,ikmn}(\overset{1}{p}) \equiv 0. \qquad (5)$$

Поскольку ангармоническое отношение является инвариантом проективного преобразования

$$\overset{1}{p}_{\alpha i} = \ell_{\alpha i} = \frac{\xi_\alpha x_i + s_\alpha}{x_i + \lambda_\alpha} = \frac{\xi'_\alpha x'_i + s'_\alpha}{x'_i + \lambda'_\alpha},$$

где

$$x = \frac{a\,x' + b}{x' + c} \qquad \text{и обратно} \qquad x' = \frac{-c\,x + b}{x - a}$$

$$\xi' = \frac{a\,\xi + \sigma}{\lambda + a}$$

$$\sigma' = \frac{b\,\xi + c\,\sigma}{\lambda + a}$$

$$\lambda' = \frac{c\,\lambda + b}{\lambda + a},$$

появляется возможность построить проективную геометрию плоскости на новых основаниях, а именно, на спорадическом решении Михайличенко (5) сакрального уравнения Теории физических структур:

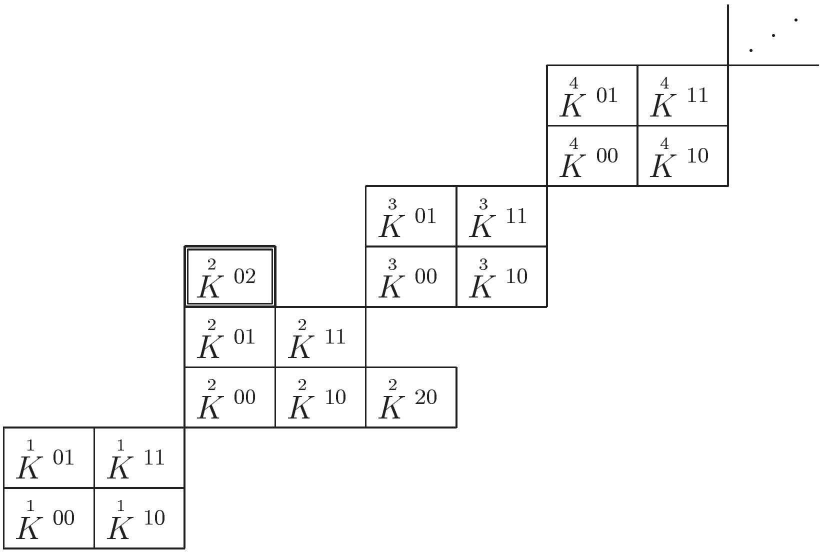
$$\begin{matrix}\Phi_{2,4}(\varphi_{\alpha i},\ \varphi_{\alpha k},\ \varphi_{\alpha m},\ \varphi_{\alpha n}, \\ \varphi_{\beta i},\ \varphi_{\beta k},\ \varphi_{\beta m},\ \varphi_{\beta n})\end{matrix} \equiv 0.$$

Итак, имеет место следующая

Сакральная формулировка закона, лежащего в основании ангармонического отношения и в основании проективной геометрии

$$\boxed{\overset{2}{\boldsymbol{M}}{}^{\boldsymbol{02}}_{\boldsymbol{\alpha\beta;\, ikmn}}(\overset{1}{\boldsymbol{p}}) \equiv \boldsymbol{0}}$$

$$\overset{1}{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{\alpha i}} = \boldsymbol{\ell_{\alpha i}} = \frac{\boldsymbol{\xi_\alpha x_i + s_\alpha}}{\boldsymbol{x_i + \lambda_\alpha}}$$



Место физической структуры ранга (2, 4), выражающей сущность ангармонического отношения и тесно связанной с ним проективной геометрии, среди всех возможных физических структур.

Литература к Примеру 12

[1]. *Лев В.Х.* Бинарная физическая структура ранга (3,3). //Структурный анализ символьных последовательностей. Выпуск 101. Вычислительные системы. - Новосибирск.: Институт математики СОАН СССР, 1984. С. 91 - 113.

Пример 13. Тонкие и толстые линзы

Законы геометрической оптики, действующие в толстых линзах, являются наглядной иллюстрацией спорадической физической структуры Михайличенко ранга (2,4),

$$\overset{2}{M}{}^{02}_{\alpha\beta;\,ikmn}(\overset{1}{p}) \equiv 0,$$

лежащей в основании (см. Пример 12) теории ангармонических отношений, инвариантных относительно проективных преобразований

$$x' = \frac{c_1 x + c_2}{x + c_3}.$$

Как известно, формула тонкой линзы имеет следующий вид:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

или

$$\frac{1}{u_{\alpha i}} + \frac{1}{x_i} = \frac{1}{f_\alpha},$$

где $a = u_{\alpha i}$ – расстояние от изображения i^* до центра линзы α,
$b = x_i$ — расстояние от предмета i до центра линзы α,
$f = f_\alpha$ – фокусное расстояние тонкой линзы α.
(Заметим, что при $f_\alpha \to \infty$ $\quad u_{\alpha i} \to -x_i$) (см рис. 1)

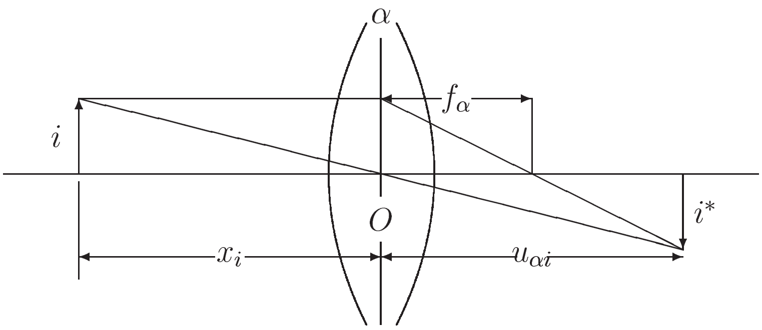


Рис. 1 Основные параметры тонкой линзы.

Заметим, что формула тонкой линзы может быть переписана в виде:

$$\overset{\circ}{w}_{\alpha i} = s_i + s_\alpha,$$

где

$$\overset{\circ}{w}_{\alpha i} = \frac{1}{u_{\alpha i}}$$

$$s_i = -\frac{1}{x_i} \qquad s_\alpha = \frac{1}{f_\alpha}.$$

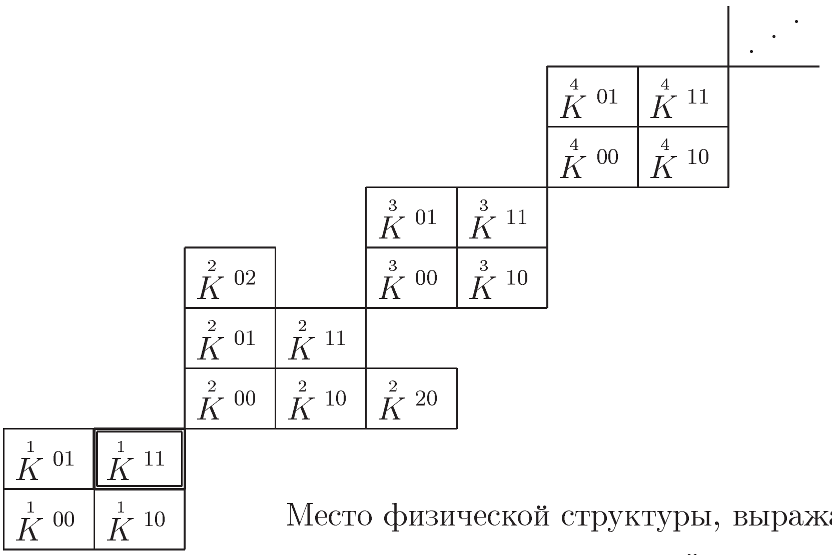
Таким образом,

Сакральная формулировка геометрической оптики тонких линз

имеет следующий вид:

$$\boxed{\overset{1}{\boldsymbol{K}}{}^{\mathbf{11}}_{\alpha\beta;\,ik}(\overset{\circ}{\boldsymbol{w}}) = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \overset{\circ}{\boldsymbol{w}}_{\alpha i} & \overset{\circ}{\boldsymbol{w}}_{\alpha k} \\ -\mathbf{1} & \overset{\circ}{\boldsymbol{w}}_{\beta i} & \overset{\circ}{\boldsymbol{w}}_{\beta k} \end{vmatrix} \equiv \mathbf{0}}$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{w}}_{\alpha i} = \boldsymbol{s}_i + \boldsymbol{s}_\alpha = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{u}_{\alpha i}} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}_i} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f}_\alpha}$$

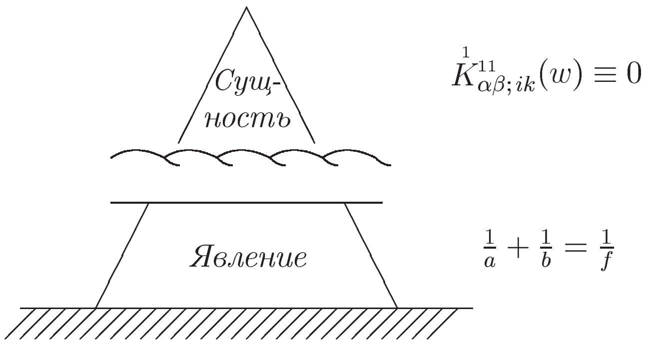


Место физической структуры, выражающей сущность законов геометрической оптики тонких линз, среди всех возможных физических структур.

Итак, сущность законов геометрической оптики тонких линз, состоит в существовании сакральных отношений между множеством тонких линз $\underline{\mathfrak{N}}$ и множеством предметов $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждая линза $\underset{-}{\boldsymbol{\alpha}}$ является **криптоточкой** сакрального нульмерного криптоточечного пространства, а каждый предмет $\bar{\boldsymbol{i}}$ является **криптоточкой** другого сакрального нульмерного криптоточечного пространства.

Другими словами, геометрическая оптика тонких линз является сакральной криптоточечно-криптоточечной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.

Сущность закона геометрической оптики тонких линз состоит в равенстве нулю скалярного произведения двухкриптоточечного корта линз на двухкриптоточечный корт предметов, объёмы которых одновременно тождественно равны нулю.



Явление и сущность закона геометрической оптики тонких линз.

Что же касается закона распределения света в толстых линзах, то формула толстой линзы
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \tag{2}$$
по своему физическому смыслу существенно отличается от формулы (1).

Дело в том, что, как известно, толстая линза α характеризуется не только фокусным расстоянием F_α, но и двумя главными плоскостями H_1 и H_2, от которых отсчитываются расстояние a до предмета i и расстояние b до изображения i^*. А так как положение главных плоскостей H_1 и H_2 ничем не выделено, то на опыте измеряются расстояние x_i от предмета i до передней поверхности линзы α и расстояние $u_{\alpha i}$ от изображения i^* до её задней поверхности.

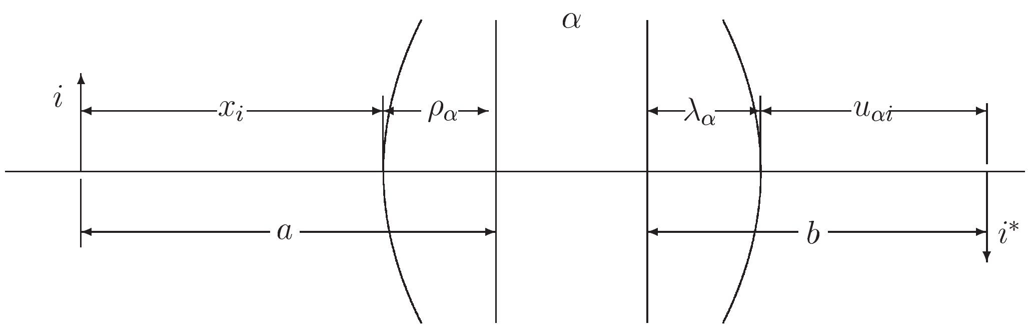


Рис. 2 Основные параметры толстой линзы.

Таким образом, формула толстой линзы может быть записана в виде:
$$\frac{1}{u_{\alpha i} + \lambda_\alpha} + \frac{1}{x_i + \rho_\alpha} = \frac{1}{F_\alpha}, \tag{3}$$

где ρ_α — расстояние от передней поверхности линзы до первой главной плоскости H_1;
λ_α — расстояние от задней поверхности линзы до второй главной плоскости H_2;
x_i — расстояние от предмета i до передней поверхности линзы;
$u_{\alpha i}$ — расстояние от изображения i^* до задней поверхности линзы;
F_α — фокусное расстояние толстой линзы.

Из равенства (3) следует выражение двухиндексного расстояния $u_{\alpha i}$ как функции **одного** параметра x_i, характеризующего предмет i и **трёх** параметров F_α, ρ_α и λ_α, характеризующих толстую линзу α:

$$u_{\alpha i} = \frac{\xi_\alpha x_i + \sigma_\alpha}{x_i + \zeta_\alpha}, \tag{4}$$

где

$$\xi_\alpha = F_\alpha - \lambda_\alpha$$
$$\sigma_\alpha = (F_\alpha - \lambda_\alpha)\rho_\alpha + F_\alpha \lambda_\alpha$$
$$\zeta_\alpha = \rho_\alpha - F\alpha.$$

Итак, возьмём четыре предмета i, k, m, n из множества предметов $\mathfrak{M}$ и две толстые линзы α, β из множества $\mathfrak{N}$ и запишем восемь однотипных выражений:

$$\begin{aligned}
u_{\alpha i} &= \frac{\xi_\alpha x_i + \sigma_\alpha}{x_i + \zeta_\alpha} & u_{\beta i} &= \frac{\xi_\beta x_i + \sigma_\beta}{x_i + \zeta_\beta} \\
u_{\alpha k} &= \frac{\xi_\alpha x_k + \sigma_\alpha}{x_k + \zeta_\alpha} & u_{\beta k} &= \frac{\xi_\beta x_k + \sigma_\beta}{x_k + \zeta_\beta} \\
u_{\alpha m} &= \frac{\xi_\alpha x_m + \sigma_\alpha}{x_m + \zeta_\alpha} & u_{\beta m} &= \frac{\xi_\beta x_m + \sigma_\beta}{x_m + \zeta_\beta} \\
u_{\alpha n} &= \frac{\xi_\alpha x_n + \sigma_\alpha}{x_n + \zeta_\alpha} & u_{\beta n} &= \frac{\xi_\beta x_n + \sigma_\beta}{x_n + \zeta_\beta}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Ясно, что система восьми уравнений (5) относительно десяти неизвестных

$$x_i,\, x_k,\, x_m,\, x_n;\; \xi_\alpha,\, \sigma_\alpha,\, \zeta_\alpha;\; \xi_\beta,\, \sigma_\beta,\, \zeta_\beta$$

должна иметь специальный вид, чтобы можно было исключить из неё все десять неизвестных и получить при этом одно соотношение между восемью однотипными расстояниями

$$u_{\alpha i},\, u_{\alpha k},\, u_{\alpha m},\, u_{\alpha n};\; u_{\beta i},\, u_{\beta k},\, u_{\beta m},\, u_{\beta n}.$$

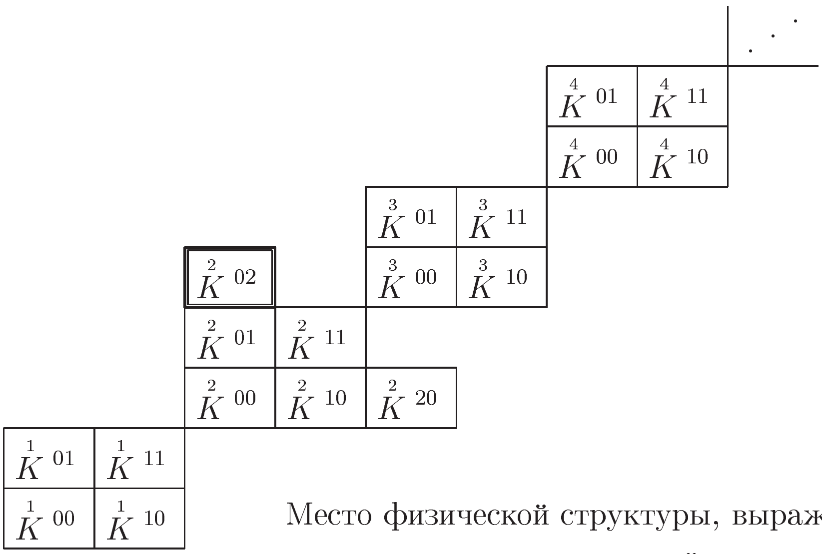
Итак, исключая из восьми уравнений (5) все параметры x_i, x_k, x_m, x_n, характеризующие четыре предмета i, k, m, n и все параметры $\xi_\alpha, \sigma_\alpha, \zeta_\alpha;\ \xi_\beta, \sigma_\beta, \zeta_\beta$, характеризующие две толстые линзы α и β, получим следующее соотношение между измеряемыми на опыте расстояниями в виде:

Сакральная формулировка геометрической оптики толстых линз

$$\forall \alpha\beta \in \mathfrak{N} \qquad \forall i,k,m,n \in \mathfrak{M}$$

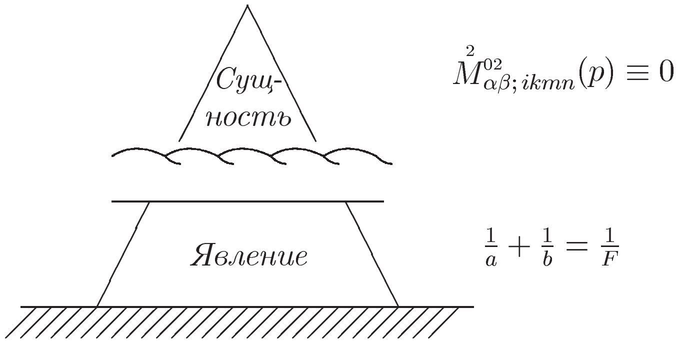
$$\boxed{\begin{gathered}\overset{1}{\boldsymbol{M}}{}^{\mathbf{02}}_{\boldsymbol{\alpha\beta;ikmn}}(\overset{1}{\boldsymbol{p}}) = \\ = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{p_{\alpha i}} & \boldsymbol{p_{\alpha k}} & \boldsymbol{p_{\alpha m}} & \boldsymbol{p_{\alpha n}} \\ \boldsymbol{p_{\beta i}} & \boldsymbol{p_{\beta k}} & \boldsymbol{p_{\beta m}} & \boldsymbol{p_{\beta n}} \\ \boldsymbol{p_{\alpha i}p_{\beta i}} & \boldsymbol{p_{\alpha k}p_{\beta k}} & \boldsymbol{p_{\alpha m}p_{\beta m}} & \boldsymbol{p_{\alpha n}p_{\beta n}} \end{vmatrix} \equiv \mathbf{0}\end{gathered}}$$

$$\overset{1}{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{\alpha i}} = \boldsymbol{u_{\alpha i}} = \frac{\boldsymbol{\xi_\alpha x_i + \sigma_\alpha}}{\boldsymbol{x_i + \zeta_\alpha}}$$

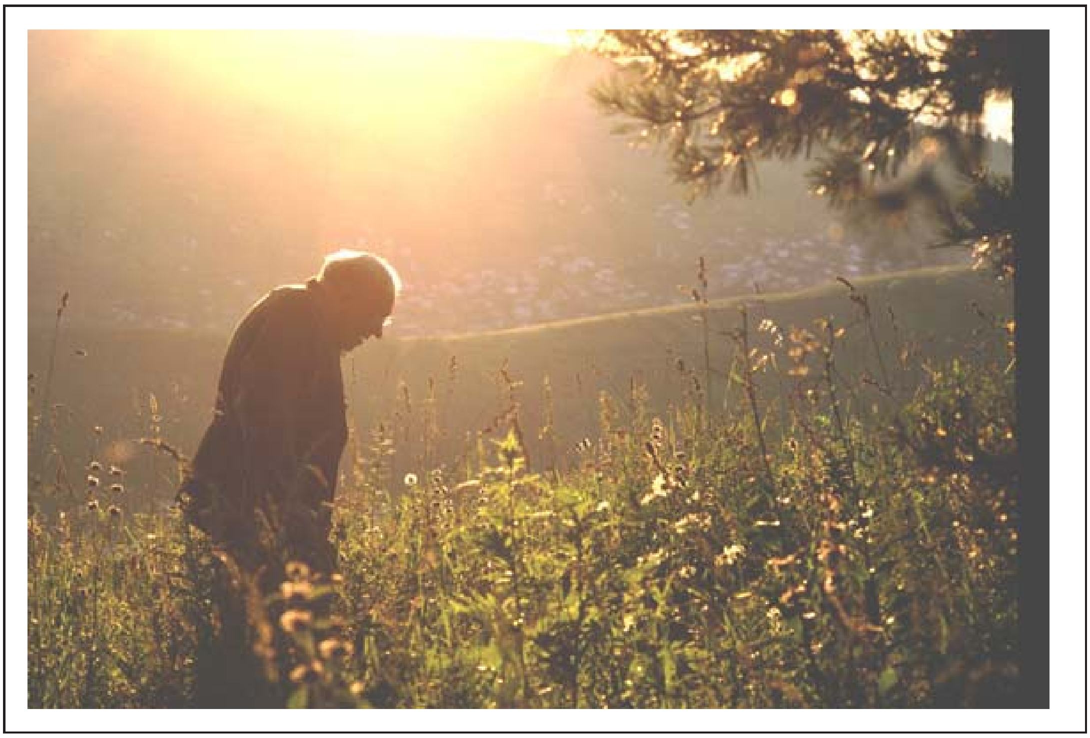


Место физической структуры, выражающей сущность законов геометрической оптики толстых линз, среди всех возможных физических структур.

Итак, сущность законов геометрической оптики толстых линз состоит в существовании сакральных отношений между множеством толстых линз $\underline{\mathfrak{N}}$ и множеством предметов $\overline{\mathfrak{M}}$.



Явление и сущность закона геометрической оптики толстых линз.



Озарение: истина где-то рядом! (Школа ТФС – 2000)

Фото W. Sumner

Пример 14. Пространственная кинематика

Наука родилась из веры в математическую интерпретацию природы.

— Джон Герман Рэндалл

Для мыслящего ученого математическое описание всегда было неиссякаемым источником удивления, рожденного тем, что природа проявлет столь высокую степень соответствия математическим формулам.

— Морис Клайн

Кинеметика – простейший раздел физики и потому наиболее сложный для понимания, так как очень трудно объяснять “очевидные” вещи, хорошо знакомые и привычные с самого детства. В са́мом деле, наверное ни у кого из физиков не возникают следующие вопросы:

В чём сущность поступательного и вращательного движения?

Что скрывается за понятием скорости и ускорения?

Что такое угловая скорость?

Короче говоря, существуют ли объективные законы кинематики поступательного и вращательного движения подобные тому, который существует в динамике материальной точки, как, например, закон Ньютона?

На первый взгляд эти вопросы относятся к области “философии” и не могут возникнуть у физика, занимающегося конкретными физическими проблемами. Однако, именно из рассмотрения “очевидных” понятий пространства, времени и движения, хорошо известных каждому ещё с детства, как раз и родилась по-настоящему глубокая физическая теория – теория относительности. Так что, может быть не стоит смотреть свысока на вопросы, возникающие в рамках “школьной” физики.

Ответ на поставленные выше вопросы состоит в том, что сущность и рациональную основу Мироздания составляют *физические структуры того или иного рода.* Именно они, и только они, определяют вид и строение всех фундаментальных физических законов, всех физических величин и понятий. И в частности, основные понятия и соотношения кинематики представляют собой следствия, вытекающие из физических структур, в свою очередь возникающих из универсального Принципа сакральной симметрии.

Итак, что же такое движение? В чём его сущность? Раздел физики, рассматривающий понятие движения, называется кинематикой. К этому понятию можно подойти с двух различных точек зрения. В связи с этим мы будем различать две кинематики: **пространственную** и **пространственно-временну́ю**.

В **пространственной кинематике** рассматриваются два множества: множество тел, движущихся с различными скоростями $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$, и множество событий (вспышек) $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$, во время которых осуществляется **одна** измерительная операция: с помощью линейки измеряется путь $\ell_{\alpha i}$, пройденный телом α к моменту вспышки i.

В **пространственно-временно́й кинематике** рассматривается одно движущееся тело и множество событий (вспышек) $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$, во время которых осуществляются **две** измерительные операции: с помощью линейки измеряется одна пространственная координата x_i и с помощью часов – одна временна́я координата t_i.

Законы пространственной кинематики

Как известно, уравнение, описывающее равномерное движение материальной точки, имеет следующий вид:

$$x = b + vt,$$

где b – координата начального положения и v – скорость, которые рассматриваются как постоянные.

Однако, для того, чтобы выявить *сущность* равномерного движения, необходимо рассмотреть два вида *нечисловых переменных* α и i, взятых соответственно из множеств $\underline{\mathfrak{N}} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ и $\overline{\mathfrak{N}} = \{i, k, \ldots\}$, где $\underline{\mathfrak{N}}$ – множество движущихся тел; $\overline{\mathfrak{M}}$ – множество моментов времени (множество вспышек), во время которых происходит измерение пройденных телами $\alpha, \beta, \ldots$ расстояний $\ell_{\alpha i}, \ell_{\beta i}, \ldots$:

$$\ell_{\alpha i} = b_\alpha + v_\alpha t_i.$$

Тогда в зависимости от того, какие из двух параметров b и v, игравшие ранее роль постоянных, рассматриваются теперь как *числовые функции нечисловой переменной* α, возникают три, вообще говоря, различные состояния движения системы точек, которые описываются тремя различными физическими структурами.

1. Кинематика покоя множества тел, находящихся в разных точках

Рассмотрим систему неподвижных материальных тел $\underline{\mathfrak{N}} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$, находящихся в разных точках (см. рис. 1).

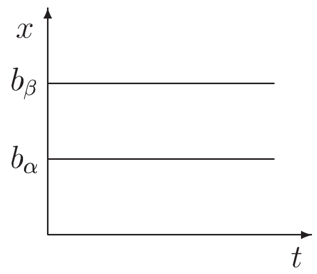


Рис. 1. Законы движения тел, находящихся в состоянии покоя.

Закон движения тела, находящегося в состоянии покоя, описывается физической структурой рода:

$$\overset{1}{K}{}^{01}_{\alpha;ik}(\overset{\circ}{u}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \overset{\circ}{u}_{\alpha i} & \overset{\circ}{u}_{\alpha k} \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{\circ}{u}_{\alpha i} & \overset{\circ}{u}_{\alpha k} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \overset{\circ}{u}_{\alpha i} - \overset{\circ}{u}_{\alpha k} = 0,$$

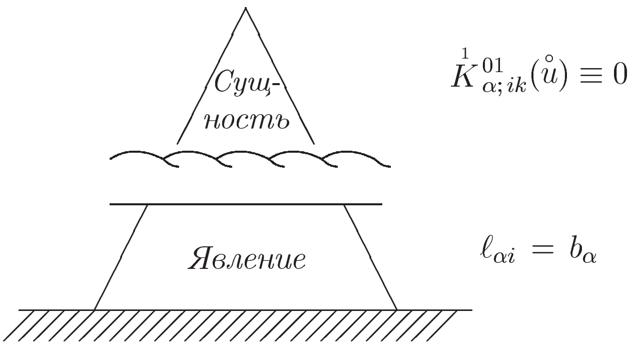
где

$$\overset{\circ}{u}_{\alpha i} = s_\alpha \qquad \text{или} \qquad \overset{\circ}{u}_{\alpha i} = \ell_{\alpha i} = s_\alpha = b_\alpha,$$

где s_α – скрытый параметр.

Итак, сущность кинематики покоя состоит в существовании сакральных отношений между множеством неподвижных тел $\underline{\mathfrak{N}}$ и множеством событий (вспышек) $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждое неподвижное тело $\overset{\leftarrow}{\alpha}$ является **криптовектором** сакрального одномерного криптовекторного пространства, а каждое событие i является **точкой** другого сакрального одномерного точечного пространства.

Другими словами, кинематика покоя является сакральной криптовектор-точечной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.

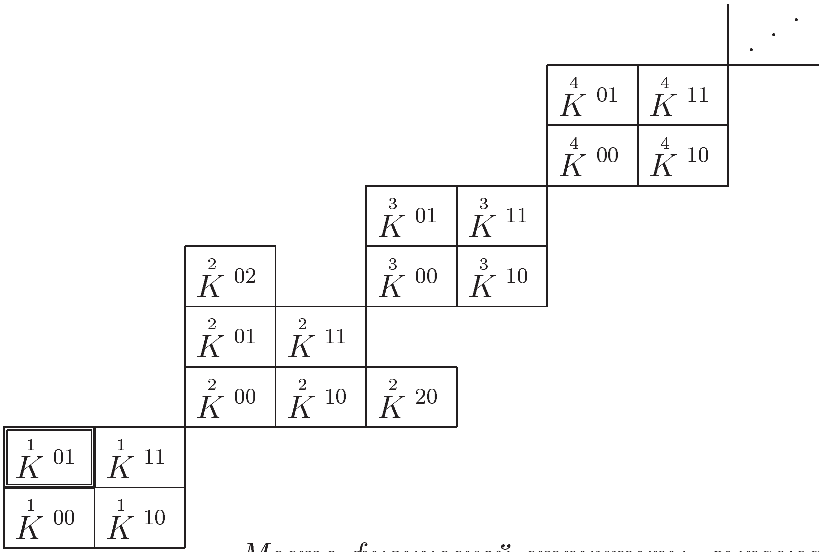


Явление и сущность кинематики покоя.

Сакральная формулировка кинематики покоя

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{1}{K}{}^{01}_{\alpha;ik}(\overset{0}{u}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{0}{u}_{\alpha i} = \ell_{\alpha i} = b_\alpha}$$



Место физической структуры, выражающей сущность кинематики покоя, среди всех возможных физических структур.

2. Пространственная кинематика системы тел, стартующих из одной точки с разными скоростями

Рассмотрим систему тел $\underline{\mathfrak{N}} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$, одновременно стартующих из начала координат $(b = 0)$ с разными постоянными скоростями $v_\alpha, v_\beta, \ldots$ (см. рис. 2).

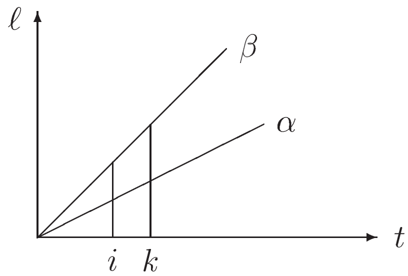


Рис. 2. Законы движения тел, стартующих из одной точки с разными скоростями.

В этом случае

$$\ell_{\alpha i} = v_\alpha t_i,$$

и, следовательно, будет иметь место очевидное тождество:

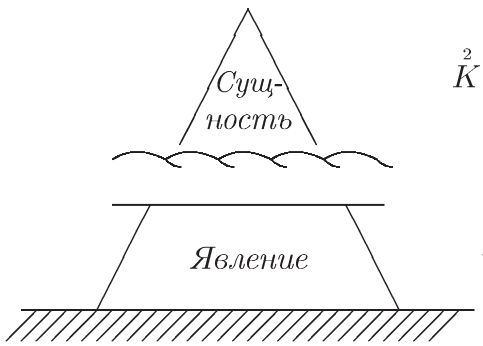
$$\forall\, \alpha, \beta \in \underline{\mathfrak{N}} \quad \text{и} \quad \forall\, i, k \in \overline{\mathfrak{M}}$$

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\alpha\beta;ik}(\overset{1}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \overset{1}{a}_{\alpha i} & \overset{1}{a}_{\alpha k} & 0 \\ 0 & \overset{1}{a}_{\beta i} & \overset{1}{a}_{\beta k} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{1}{a}_{\alpha i} & \overset{1}{a}_{\alpha k} \\ \overset{1}{a}_{\beta i} & \overset{1}{a}_{\beta k} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где

$$\overset{1}{a}_{\alpha i} = \ell_{\alpha i} = v_\alpha \, t_i.$$

Итак, сущность кинематики равномерного движения из одной и той же точки состоит в существовании сакральных отношений между множеством тел $\underline{\mathfrak{N}}$, равномерно движущихся из одной точки и множеством событий (вспышек) $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$. При этом каждое равномерно движущееся тело $\overleftarrow{\alpha}$ является **вектором** сакрального одномерного векторного пространства, а каждое событие $\vec{i}$ является **вектором** другого сакрального одномерного векторного пространства.



$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\alpha\beta;\,ik}(\overset{1}{a}) \equiv 0$$

$$\ell_{\alpha i} = v_\alpha \, t_i$$

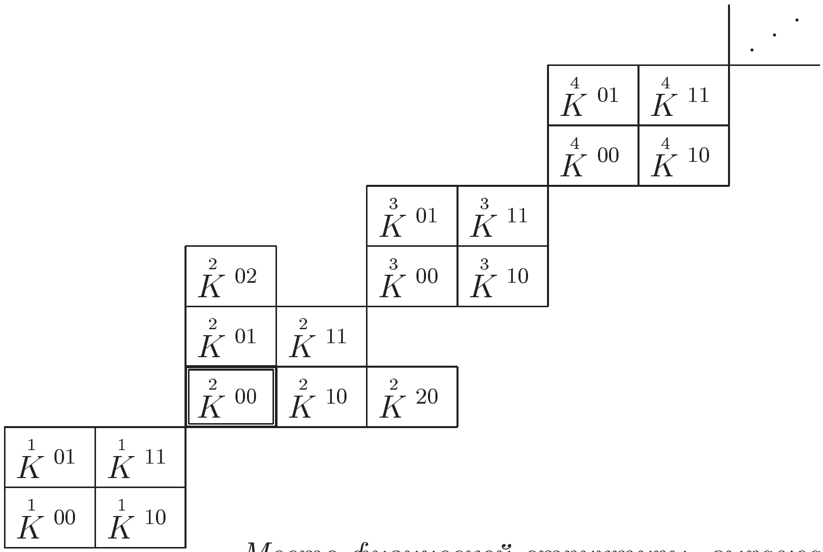
Явление и сущность кинематики равномерного движения из одной и той же точки.

Сакральная формулировка кинематики равномерного движения тел, стартующих из одной точки

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{2}{K}{}^{00}_{\alpha\beta;ik}(\overset{1}{a}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{1}{a}_{\alpha i} = \xi_1 \, x^1 = \ell_{\alpha i} = v_\alpha \, t_i}$$

Другими словами, кинематика равномерного движения из одной и той же точки является сакральной вектор-векторной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.



Место физической структуры, выражающей сущность кинематики равномерного движения из одной точки, среди всех возможных физических структур

3. Пространственная кинематика множества тел, стартующих из разных точек с одной и той же скоростью

Рассмотрим множество тел $\underline{\mathfrak{N}} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$, одновременно стартующих из различных точек $b_\alpha, b_\beta, \ldots$ на прямой и движущихся дальше с одной и той же постоянной скоростью v (см. рис. 3)

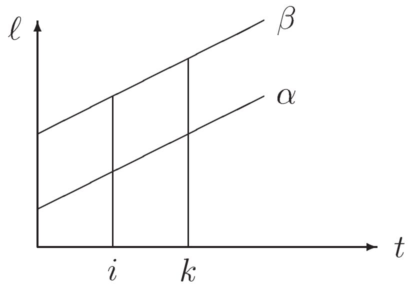


Рис. 3. Законы движения тел, стартующих из разных точек с одними и теми же скоростями.

В этом случае

$$\ell_{\alpha i} = b_\alpha + v\, t_i,$$

и, как легко убедиться, имеет место следующее тождество:

$$\forall\, \alpha, \beta \in \underline{\mathfrak{N}} \quad \text{и} \quad \forall\, i, k \in \overline{\mathfrak{M}}$$

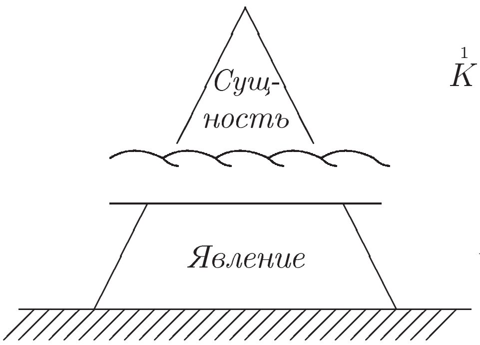
$$\overset{1}{K}{}^{11}_{\alpha\beta;ik}(\overset{0}{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \overset{0}{w}_{\alpha i} & \overset{0}{w}_{\alpha k} \\ -1 & \overset{0}{w}_{\beta i} & \overset{0}{w}_{\beta k} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где

$$\overset{0}{w}_{\alpha i} = s_i + \sigma_\alpha = \ell_{\alpha i} = v\, t_i + b_\alpha .$$

Итак, сущность кинематики равномерного движения из разных точек с одной и той же скоростью состоит в существовании сакральных отношений между множеством тел $\underline{\mathfrak{N}}$, равномерно движущихся с одной и той же скоростью из разных точек и множеством событий (вспышек) $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждое равномерно движущееся тело α является **криптоточкой** сакрального нульмерного криптоточечного пространства, а каждое событие i является **криптоточкой** другого сакрального нульмерного криптоточечного пространства.

Другими словами, кинематика равномерного движения из различных точек с одной и той же постоянной скоростью является сакральной криптоточечно-криптоточечной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.



$$\overset{1}{K}{}^{11}_{\alpha\beta;\,ik}(\overset{0}{w}) \equiv 0$$

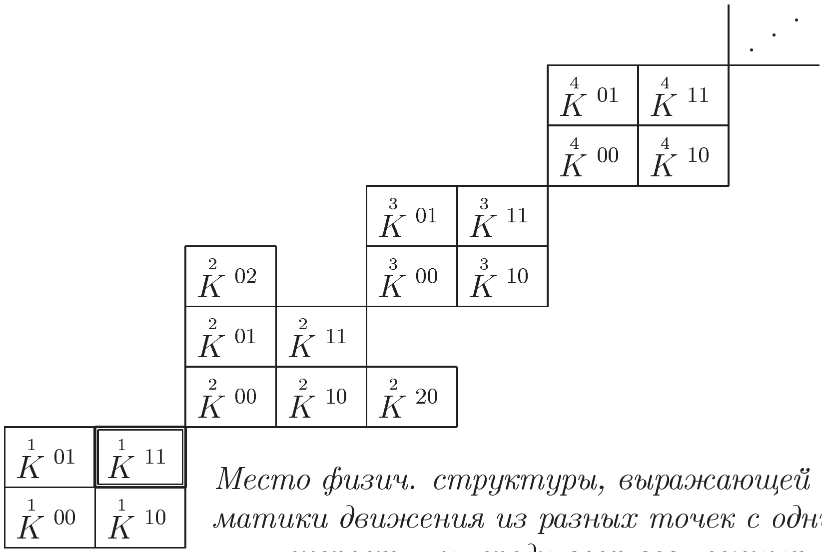
$$\ell_{\alpha i} = b_\alpha + v\, t_i$$

Явление и сущность кинематики равномерного движения из разных точек с одной и той же скоростью v .

Сакральная формулировка кинематики равномерного движения тел, стартующих из разных точек с одной и той же скоростью

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{1}{K}{}^{11}_{\alpha\beta;ik}(\overset{0}{w}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{0}{w}_{\alpha i} = s_i + \sigma_\alpha = \ell_{\alpha i} = v\, t_i + b_\alpha}$$



Место физич. структуры, выражающей сущность кинематики движения из разных точек с одними и теми же скоростями, среди всех возможных физических структур.

4. Пространственная кинематика множества тел, стартующих из разных точек с разными скоростями

Рассмотрим множество тел $\underline{\mathfrak{N}} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$, одновременно стартующих из разных точек $b_\alpha, b_\beta, \ldots$ и движущихся с разными скоростями $v_\alpha, v_\beta, \ldots$ (см. рис. 4).

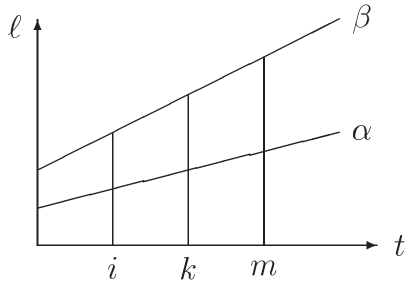


Рис. 4. Законы движения тел, стартующих из разных точек с разными скоростями.

В этом случае

$$\ell_{\alpha i} = b_\alpha + v_\alpha t_i,$$

и, следовательно, будет иметь место следующее тождество:

$$\forall\ \alpha, \beta \in \underline{\mathfrak{N}} \quad \text{и} \quad \forall\ i, k, m \in \overline{\mathfrak{M}}$$

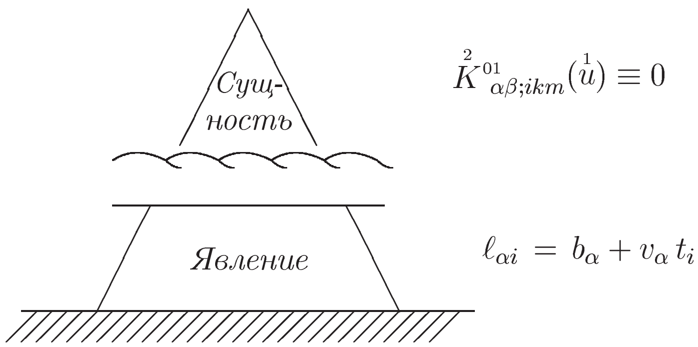
$$\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\beta;ikm}(\overset{1}{u}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \overset{1}{u}_{\alpha i} & \overset{1}{u}_{\alpha k} & \overset{1}{u}_{\alpha m} \\ 0 & \overset{1}{u}_{\beta i} & \overset{1}{u}_{\beta k} & \overset{1}{u}_{\beta m} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{1}{u}_{\alpha i} & \overset{1}{u}_{\alpha k} & \overset{1}{u}_{\alpha m} \\ \overset{1}{u}_{\beta i} & \overset{1}{u}_{\beta k} & \overset{1}{u}_{\beta m} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где

$$\overset{1}{u}_{\alpha i} = \xi_1(\alpha)\, x^1(i) + \sigma(\alpha) \,=\, \ell_{\alpha i} \,=\, v_\alpha\, t_i + b_\alpha.$$

Итак, сущность кинематики равномерного движения из разных точек с различными скоростями состоит в существовании сакральных отношений между множеством тел $\underline{\mathfrak{N}}$, равномерно движущихся с различными скоростями из разных точек и множеством событий (вспышек) $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждое равномерно движущееся тело $\overleftarrow{\boldsymbol{\alpha}}$ является **криптовектором** сакрального одномерного криптовекторного пространства, а каждое событие i является **точкой** другого сакрального одномерного точечного пространства.

Другими словами, кинематика равномерного движения из различных точек с различными скоростями является сакральной криптовекторно-точечной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.

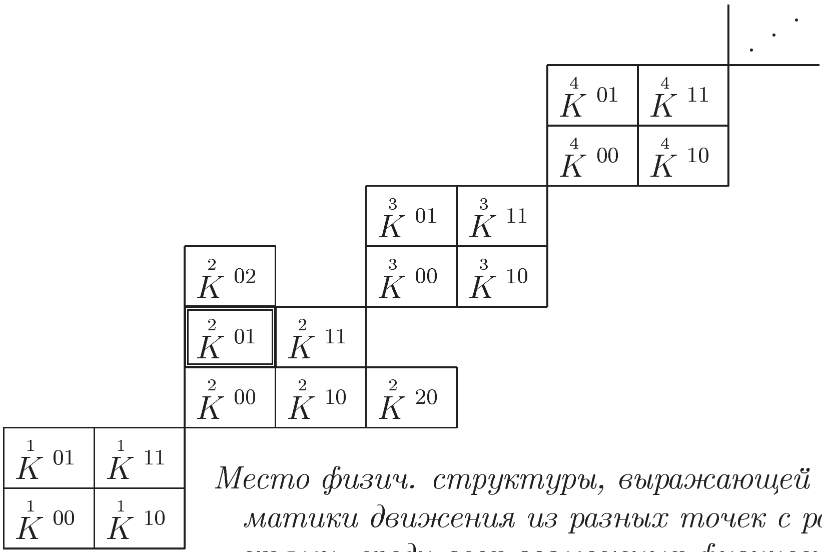


Явление и сущность кинематики равномерного движения из разных точек с различными скоростями v .

Сакральная формулировка кинематики равномерного движения тел, стартующих из разных точек с различными скоростями

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\beta;ikm}(\overset{1}{u}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{1}{u}_{\alpha i} = \xi_1(\alpha)\,x^1(i) + \sigma(\alpha) \;=\; \ell_{\alpha i} \;=\; v_\alpha\, t_i + b_\alpha}$$



Место физич. структуры, выражающей сущность кинематики движения из разных точек с разными скоростями, среди всех возможных физических структур.

5. Пространственная кинематика равноускоренного движения тел, стартующих из одной и той же точки b_o с нулевой начальной скоростью $v_o = o$ с различными ускорениями

Рассмотрим множество тел $\underline{\mathfrak{N}} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$, стартующих из одной и той же точки b_o с нулевой начальной скоростью $v_o = o$ с различными ускорениями a_α.

В этом случае путь, пройденный телом,

$$\ell_{\alpha i} = b_o + a_\alpha \frac{t_i^2}{2},$$

и, следовательно, будет иметь место следующее тождество:

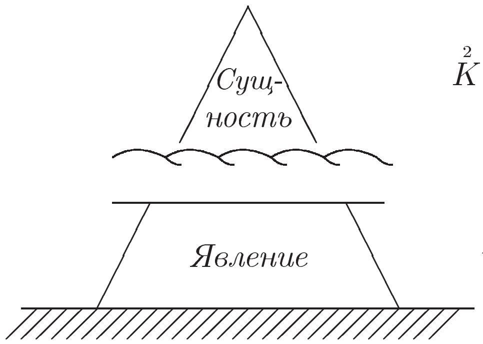
$$\forall\, \alpha, \beta \in \underline{\mathfrak{N}} \quad \text{и} \quad \forall\, i, k, \in \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$$

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\alpha\beta;ik}(\overset{1}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{\alpha i} & a_{\alpha k} & 0 \\ 0 & a_{\beta i} & a_{\beta k} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{\alpha i} & a_{\alpha k} \\ a_{\beta i} & a_{\beta k} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где

$$a_{\alpha i} \;=\; \ell_{\alpha i} - b_o \;=\; \xi_1(\alpha) x^1(i) \;=\; a_\alpha \frac{t_i^2}{2}.$$

Итак, сущность кинематики равноускоренного движения тел, стартующих из одной и той же точки при нулевой начальной скорости состоит в существовании сакральных отношений между множеством тел $\underline{\mathfrak{N}}$, движущимися из одной точки с нулевой начальной скоростью и различными ускорениями, и множеством событий (вспышек) $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждое равномерно движущееся тело $\overleftarrow{\alpha}$ является **вектором** сакрального одномерного векторного пространства, а каждое событие $\vec{i}$ является **вектором** другого сакрального одномерного векторного пространства.



$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\alpha\beta;\,ik}(\overset{1}{a}) \equiv 0$$

$$\ell_{\alpha i} = b_o + a_\alpha \frac{t_i^2}{2}$$

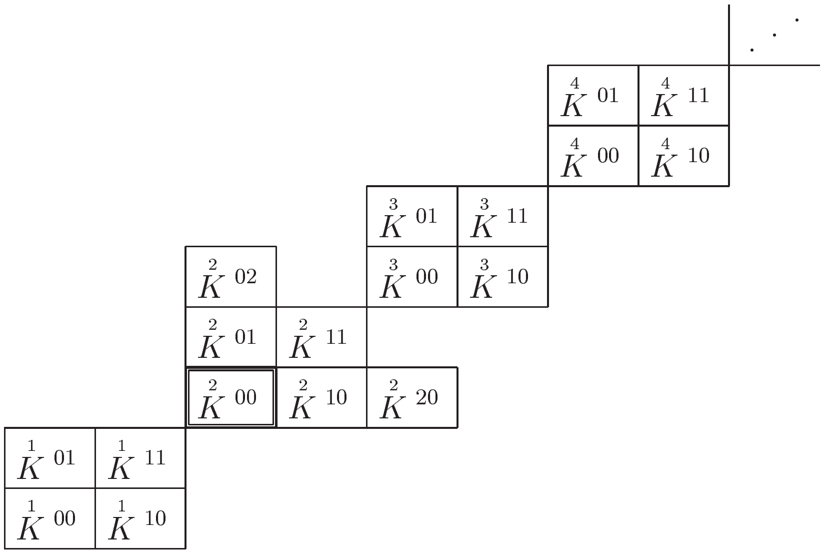
Явление и сущность кинематики равноускоренного движения тел, стартующих из одной и той же точки с различными ускорениями.

Другими словами, кинематика равноускоренного движения тел, стартующих из одной и той же точки с различными ускорениями, является сакральной вектор-векторной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.

Сакральная формулировка кинематики равноускоренного движения тел, стартующих из одной точки с различными ускорениями

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{2}{K}{}^{00}_{\alpha\beta;ik}(\overset{1}{a}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{1}{a}_{\alpha i} = \xi_1 x^1 = \ell_{\alpha i} - b_o = a_\alpha \frac{t_i^2}{2}}$$



Место физической структуры, выражающей сущность кинематики равноускоренного движения тел, стартующих из одной точки с различными ускорениями, среди всех возможных физических структур

6. Пространственная кинематика равноускоренного движения тел, стартующих из различных точек с различными начальными скоростями и с различными ускорениями

Рассмотрим множество тел, стартующих из различных точек b_α с различными начальными скоростями v_α и с различными ускорениями a_α .

В этом случае путь, пройденный телом,

$$\ell_{\alpha i} = b_\alpha + v_\alpha \frac{t_i}{1!} + a_\alpha \frac{t_i^2}{2!},$$

и, следовательно, будет иметь место следующее тождество:

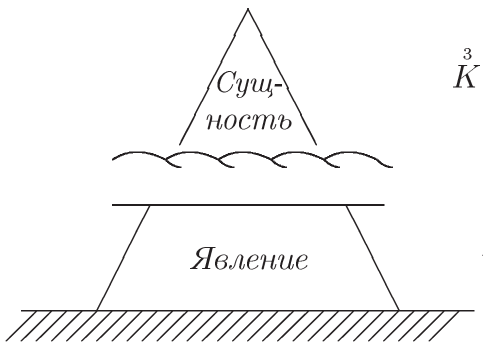
$$\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\beta\gamma;\,ikmn}(\overset{2}{u}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & u_{\alpha i} & u_{\alpha k} & u_{\alpha m} & u_{\alpha n} \\ 0 & u_{\beta i} & u_{\beta k} & u_{\beta m} & u_{\beta n} \\ 0 & u_{\gamma i} & u_{\gamma k} & u_{\gamma m} & u_{\gamma n} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{\alpha i} & u_{\alpha k} & u_{\alpha m} & u_{\alpha n} \\ u_{\beta i} & u_{\beta k} & u_{\beta m} & u_{\beta n} \\ u_{\gamma i} & u_{\gamma k} & u_{\gamma m} & u_{\gamma n} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где

$$\overset{2}{u}_{\alpha i} = \xi_1(\alpha)\, x^1(i) + \xi_2(\alpha)\, x^2(i) + \sigma(\alpha) = \ell_{\alpha i} = b_\alpha + v_\alpha \frac{t_i}{1!} + a_\alpha \frac{t_i^2}{2!}.$$

Итак, сущность пространственной кинематики равноускоренного движения из разных точек при различных начальных скоростях состоит в существовании сакральных отношений между множеством тел $\underline{\mathfrak{N}}$, движущихся из разных точек с разными начальными скоростями и различными ускорениями, и множеством событий (вспышек) $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждое равноускоренно движущееся тело $\overset{\leftarrow}{\alpha}$ является **криптовектором** сакрального двумерного криптовекторного пространства, а каждое событие i является **точкой** другого сакрального двумерного точечного пространства.

Другими словами, пространственная кинематика равноускоренного движения точек, стартующих с различными начальными скоростями и ускорениями, является сакральной криптовектор-точечной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.



$$\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\beta\gamma;\,ikmn}(\overset{2}{u}) \equiv 0$$

$$\ell_{\alpha i} \;=\; b_\alpha + v_\alpha \frac{t_i}{1!} + a_\alpha \frac{t_i^2}{2!}$$

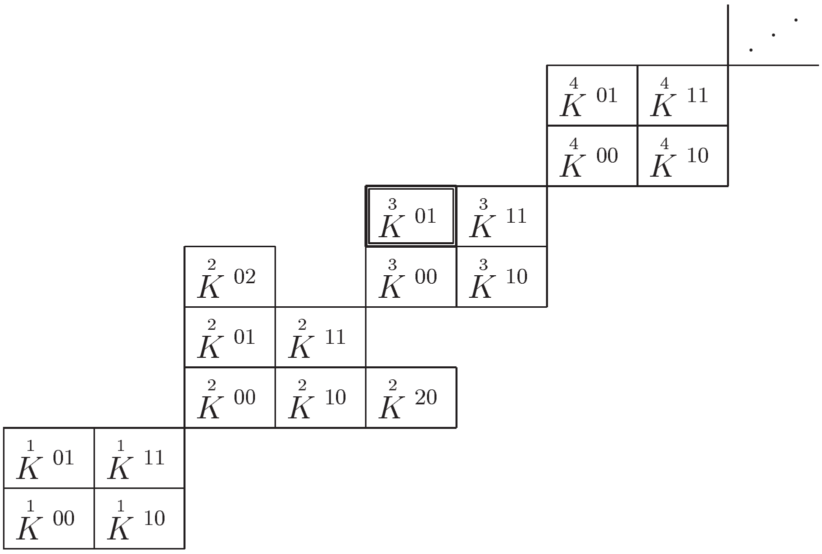
Явление и сущность кинематики равноускоренного движения точек, стартующих из разных точек с различными начальными скоростями и ускорениями.

Сакральная формулировка кинематики равноускоренного движения тел, стартующих из разных точек с различными начальными скоростями и различными ускорениями

$$\boxed{\boldsymbol{\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\beta\gamma;\,ikmn}(\overset{2}{u}) \equiv 0}}$$

$$\boldsymbol{\overset{2}{u}_{\alpha i} = \xi_1(\alpha)\, x^1(i) + \xi_2(\alpha)\, x^2(i) + \sigma(\alpha) \;=}$$

$$\boldsymbol{= \ell_{\alpha i} \;=\; b_\alpha + v_\alpha \frac{t_i}{1!} + a_\alpha \frac{t_i^2}{2!}}$$



Место физической структуры, выражающей сущность кинематики равноускоренного движения тел, стартующих из разных точек с разными скоростями и разными ускорениями, среди всех возможных физических структур.

7. И, наконец, рассмотрим множество тел, закон движения которых описывается полиномом степени n

$$\ell_{\alpha i} = c_o(\alpha) + c_1(\alpha) t_i + c_2(\alpha)\frac{t_i^2}{2!} + c_3(\alpha)\frac{t_i^3}{3!} + \ldots + c_n(\alpha)\frac{t_i^n}{n!}.$$

В этом случае будет иметь место следующее тождество:

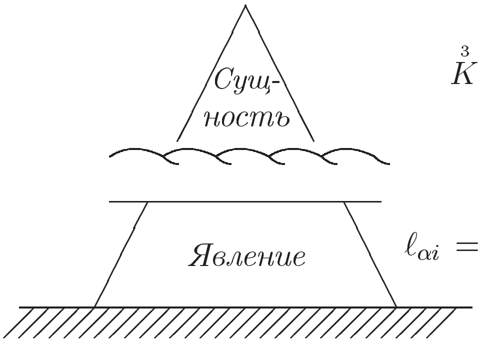
$$\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \underline{\mathfrak{N}} \quad \text{и} \quad \forall\, i_1, \ldots, i_{n+1}, i_{n+2} \in \overline{\mathfrak{M}}$$

$$\overset{n+1}{K}{}^{01}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+1}; i_1\ldots i_{n+1} i_{n+2}}(\overset{n}{u}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & u_{\alpha_1 i_1} & \ldots & u_{\alpha_1 i_{n+1}} & u_{\alpha_1 i_{n+2}} \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & u_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & u_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} & u_{\alpha_{n+1} i_{n+2}} \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_{\alpha_1 i_1} & \ldots & u_{\alpha_1 i_{n+1}} & u_{\alpha_1 i_{n+2}} \\ \hdotsfor{4} \\ u_{\alpha_{n+1} i_1} & \ldots & u_{\alpha_{n+1} i_{n+1}} & u_{\alpha_{n+1} i_{n+2}} \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Итак, сущность пространственной кинематики множества тел, закон движения которых описывается полиномом степени n, состоит в существовании сакральных отношений между множеством тел $\underline{\mathfrak{N}}$ и множеством событий (вспышек) $\overline{\mathfrak{M}}$. При этом каждое движущееся тело $\overset{\leftarrow}{\boldsymbol{\alpha}}$ является **криптовектором** сакрального n-мерного криптовекторного пространства, а каждое событие i является **точкой** другого сакрального n-мерного точечного пространства.

Другими словами, пространственная кинематика иножества тел, законы движения которых описываются полиномами степени n, является сакральной криптовектор-точечной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.



$$\overset{3}{K}{}^{01}_{\alpha\beta\gamma;\,ikmn}(\overset{2}{u}) \equiv 0$$

$$\ell_{\alpha i} = c_{o\alpha} + c_{1\alpha}\frac{t_i}{1!} + c_{2\alpha}\frac{t_i^2}{2!} + \cdots + c_{n\alpha}\frac{t_i^n}{n!}$$

Явление и сущность кинематики множества тел, закон движения которых описывается полиномом степени n

Сакральная формулировка кинематики множества тел, законы движения которых описываются полиномами степени n.

$$\boxed{\overset{n+1}{\boldsymbol{K}}{}^{\mathbf{01}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+1};\,i_1\ldots i_{n+1}i_{n+2}}(\overset{n}{\boldsymbol{u}}) \equiv \mathbf{0}}$$

$$\overset{n}{\boldsymbol{u}}_{\alpha i} = \boldsymbol{\xi_1(\alpha)\,x^1(i) + \ldots \xi_n(\alpha)\,x^n(i) + \sigma(\alpha) = \ell_{\alpha i}}$$

Литература к Примеру 14

[1]. *Эйнштейн Альберт*, Предисловие к “Оптике” Ньютона. //Сб. “Физика и реальность”, - М.: Наука. 1965, С. 34.