Глава 14

СТРОГИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Hic Rhodus, hic salta! [71]

Даже если бы математика насильно была отрезана от всех прочих каналов человеческой деятельности, в ней достало бы на столетия пищи для размышления над большими проблемами, которые мы могли бы еще решать в собственной науке.

— Жан Дьедонне

[71] *Здесь Родос, здесь прыгай!* Употребляется в значении: самое сложное, самое важное – в этом; здесь следует доказать, убедить и т.п.
Источник выражения – басня Эзопа (VII - VI вв. до н.э.) "Хвастун"; ссылаясь на очевидцев, герой басни утверждает, что на острове Родосе он совершал огромные прыжки. В ответ на похвальбу один из слушателей говорит, что можно вообразить, будто находишься на Родосе и сейчас же на деле доказать свои возможности.

Общая черта всех физических законов состоит в том, что различные физические объекты, принадлежащие к определённым классам, **равноправны** по отношению к рассматриваемому закону.

В предыдущей главе излагалось элементарное введение в *теорию кортов* – введение в математический аппарат, позволяющий естественным образом сформулировать это равноправие.

Оказывается, что из одного только требования равноправия кортов перед законом, можно получить явный вид того или иного фундаментального физического закона до его конкретной физической интерпретации.

Это похоже на чудо, но тем не менее это действительно так!

В этой главе мы (Ю.И. Кулаков, Г.Г. Михайличенко и В.Х. Лев) рассмотрим несколько конкретных примеров и покажем, как из чрезвычайно общих сакральных уравнений, не зная ничего заранее, кроме ранга[72] (s, r) (неизвестны ни **репрезентатор** φ, ни **верификатор** Φ), как бы сами собой – буквально "из ничего", получаются единственные (с точностью до несущественных переобозначений) канонические решения, допускающие ту или иную физическую интерпретацию.

§ 1. Доказательство существования и единственности физической структуры ранга (2,2) (для пешеходов)

Итак, рассмотрим физическую структуру наименьшего возможного ранга $(2,,2)$. На этом простейшем примере мы увидим, какие методы применяются при решении поставленной задачи.

Мы ищем такую бесконечную матрицу

$A = \|\varphi_{\alpha i}\|$ и такую функцию от четырёх переменных $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, чтобы элементы любой квадратной подматрицы A_{22} , построенной на двух произвольных строках α и β и двух произвольных столбцах i и k , были бы связанны между собой соотношением

$$\Phi(\varphi_{\alpha i}, \varphi_{\alpha k}, \varphi_{\beta k}, \varphi_{\beta k}) = 0 \qquad (1)$$

От функции $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ мы потребуем лишь, чтобы она была дифференцируемой, и чтобы уравнение $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ было разрешимо относительно любой из переменных.

Прежде всего, из всех элементов множеств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ выделим по одному элементу $\underline{0} \in \mathfrak{N}$ и $\overline{0} \in \mathfrak{M}$, которые назовём "эталонами" в соответствующих множествах.

[72] Из фундаментальной теоремы Михайличенко, формулировка которой будет дана в следующей главе, следует, что и сам ранг не может быть выбран произвольно – его допустимые значения лежат в узком коридоре на плоскости целочисленных значений (s, r) .

Затем, разрешив уравнение (1) относительно $\varphi_{\alpha i}$ и подставляя в (1) вместо β и k соответственно $\underline{0}$ и $\overline{0}$, получим:

$$\varphi_{\alpha i} = f\left(\varphi_{\alpha\overline{0}},\, \varphi_{\underline{0}i},\, \varphi_{\underline{0}\overline{0}}\right) = \varphi\left(\xi_\alpha, x_i\right), \tag{2}$$

где $x_i = \varphi_{\underline{0}i}$ и $\xi_\alpha = \varphi_{\alpha\overline{0}}$ – числовые параметры, характеризующие, соответственно, элементы множеств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$.

Итак, задача нахождения матрицы $A = \|\varphi_{\alpha i}\|$ или, что одно и то же, одной числовой функции от двух нечисловых аргументов α и i и одной функции от четырёх переменных $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, свелась к нахождению $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и одной числовой функции $\varphi(x, \xi)$ от двух числовых переменных ξ и x таких, что

$$\Phi\left(\varphi(\xi, x),\, \varphi(\xi, y),\, \varphi(\eta, x),\, \varphi(\eta, y)\right) \equiv 0 \tag{3}$$

Подчеркнём, что равенство (3) является тождеством относительно переменных $\xi,\ \eta,\ x,\ y$, обозначающих соответственно $\xi_\alpha,\ \xi_\beta,\ x_i,\ x_k$.

Дифференцируя тождество (3) по $\xi_\alpha,\ \xi_\beta,\ x_i,\ x_k$, мы получим систему четырёх однородных уравнений относительно четырёх неизвестных

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_4}$$

.

Чтобы эта система имела отличные от нуля решения, необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} u(\xi,x) & u(\xi,y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u(\eta,x) & u(\eta,y) \\ v(\xi,x) & 0 & v(\eta,x) & 0 \\ 0 & v(\xi,y) & 0 & v(\eta,y) \end{vmatrix} \equiv 0, \tag{4}$$

где

$$u(\xi,x) = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(\xi,x), \qquad v(\xi,x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi,x),$$

или

$$\begin{vmatrix} w(\xi,x) & w(\xi,y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w(\eta,x) & w(\eta,y) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} w(\xi,x) & w(\xi,y) \\ w(\eta,x) & w(\eta,y) \end{vmatrix} \equiv 0, \tag{5}$$

где

$$w(\xi,x) = \frac{u(\xi,x)}{v(\xi,x)}$$

Чтобы удовлетворить тождеству (5), необходимо и достаточно положить

$$u(\xi,x) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(\xi,x)}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi,x)} = A(\xi)B(x),$$

где $A(\xi)$ и $B(x)$ – произвольные функции одного переменного.

Таким образом, задача сводится к решению следующего уравнения в частных произодных

$$\frac{1}{A(\xi)} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x) - B(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi, x) = 0 \tag{6}$$

Легко видеть, что общее уравнение уравнения (6) имеет вид

$$\varphi(\xi, x) = \chi(R(\xi) \cdot S(x)),$$

где $\chi(\xi)$ – произвольная функция одной переменной, а

$$R(\xi) = exp \int A(\xi) d\xi \qquad \text{и} \qquad S(x) = exp \int \frac{dx}{B(x)}.$$

Но так как (ξ) и $B(x)$ произвольны, то

$$a_{\alpha i} = \varphi(\xi_\alpha, x_i) = \chi(R(\xi) \cdot S(x)), \tag{7}$$

где $\chi(x)$, $R(x)$ и $S(x)$ – произвольные функции.

Чтобы найти вид функции $\Phi\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$, перепишем (7) в виде

$$\chi^{-1}(a_{\alpha i}) = R(\xi) \cdot S(x),$$

откуда легко получаем, что

$$\Phi\left(\varphi_{\alpha i},\, \varphi_{\alpha k},\, \varphi_{\beta i},\, \varphi_{\beta k}\right) = \begin{vmatrix} \chi^{-1}(\varphi_{\alpha i}) & \chi^{-1}(\varphi_{\alpha k}) \\ \chi^{-1}(\varphi_{\beta i}) & \chi^{-1}(\varphi_{\beta k}) \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, мы показали, что матрица $A = \|a_{\alpha i}\|$ и функция $\Phi\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$, удовлетворяющие принципу *сакральной симметрии* , определены с точностью до произвольной функции $\chi(x)$ одной переменной и имеют вид

$$\varphi_{\alpha i} = \chi(R_\alpha \cdot S_i),$$

где R_α и S_i – произвольные числа, и

$$\Phi\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \begin{vmatrix} \chi^{-1}(x_1) & \chi^{-1}(x_2) \\ \chi^{-1}(x_3) & \chi^{-1}(x_4) \end{vmatrix}$$

Весна. 2001 год

§ 2. Доказательство существования и единственности физической структуры ранга (2,2) (для математиков)

Характерная черта для всех физических законов состоит в том, что различные физические объекты, принадлежащие к определенным классам, равноправны по отношению к рассматриваемому закону. Факт существования особого вида отношений – "отношений равноправия" – кажется нам имеющим существенное значение в качестве исходной физической идеи.

Прежде всего, придадим интуитивной идее "равноправия" строгую математическую формулировку. В этой статье мы дадим лишь частную формулировку принципа сакральной симметрии, не претендуя на слишком большую общность (это будет сделано в следующих работах).

Рассмотрим два произвольных множества: множество $\mathfrak{M}$, элементы которого будем обозначать через $i_1, i_2, \dots,$ и множество $\mathfrak{N}$ с элементами, обозначаемыми через $\alpha_1, \alpha_2, \dots$.

Допустим, что каждой паре $(i, \alpha) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляется вещественное число $u_{i,\alpha}$, т. е. на множестве $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ определена некоторая функция $u : (i, \alpha) \to u_{i\alpha}$. Пусть m и n — натуральные числа и $\mathfrak{M}_m = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, $\mathfrak{N}_n = \{\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n\}$. Подмножества $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{N}_n$ определяют некоторую матрицу из m строк и n столбцов:

$$u(i_1, i_2, \dots, i_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \|u_{i_k \alpha_l}\|_{\substack{k=1,2,\dots,m \\ l=1,2,\dots,n}}. \tag{8}$$

Каждую такую матрицу будем рассматривать как точку mn-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^{mn}$. Изменение нумерации точек множества $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{N}_n$ ведет к преобразованиям матрицы (8), сводящимся к перестановкам ее строк и столбцов. $m!n!$ преобразований пространства $\mathbb{R}^{mn}$, соответствующих перестановкам строк и столбцов матрицы (8), будем называть каноническими перестановками $\mathbb{R}^{mn}$.

Будем говорить, что на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ задана *физическая структура ранга* (m, n), если выполнены следующие условия

А) Существуют аналитическая функция mn переменных $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_{mn})$, инвариантная относительно канонических перестановок пространства $\mathbb{R}^{mn}$ и такая, что множество $M \subset \mathbb{R}^{mn}$, определяемое уравнением $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_{mn}) = 0$, есть непустое связное множество, и градиент Φ отличен от нуля в каждой точке M.

Б) Совокупность всех точек $u(i_1, i_2, \dots, i_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ пространства $\mathbb{R}^{mn}$, где $\{i_1, i_2, \dots, i_m\} = \mathfrak{M}_m \subset \mathfrak{M}$, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \mathfrak{N}_n \subset \mathfrak{N}$ образует открытое относительно M подмножество M. В частности,

$$\Phi(u_{i_1\alpha_1}, u_{i_1\alpha_2}, \dots, u_{i_m\alpha_n}) = 0 \tag{9}$$

при любых $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{N}_n$.

В) Если уравнение (9) может быть однозначно разрешено относительно $u_{i_k\alpha_\lambda}$, то $u_{i_k\alpha_\nu}$, где $\nu \neq \lambda$ и $u_{i_s\alpha_\lambda}$, где $s \neq k$ как две группы параметров входят в Φ существенным образом [2].

Г) Для всякой системы из n чисел u_λ $(\lambda = 1, 2, \dots, n)$, удовлетворяющей уравнению

$$\Phi(u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{m-1,1}, u_{m-1,2}, \dots, u_{m-1,n}, u_1, u_2, \dots, u_n) = 0,$$

где

$$u_{p\lambda} = u_{i_p\alpha_\lambda} \quad (p = 1, 2, \dots, m-1; \quad \lambda = 1, 2, \dots, n), \quad i_p \in \mathfrak{M}_{m-1}, \quad \alpha_\lambda \in \mathfrak{N}_n$$

найдется такой элемент i, что $u_1 = u_{i,\alpha_1}$, $u_2 = u_{i,\alpha_2}, \dots, u_n = u_{i,\alpha_n}$. Аналогично, для всякой системы из m чисел v_ν $(\nu = 1, 2, \dots, m)$, удовлетворяющей уравнению

$$\Phi(u_{11}, \dots, u_{i,n-1}, v_1, u_{21}, \dots, u_{2,n-1}, v_2, \dots, u_{m1}, \dots, u_{m,n-1}, v_m) = 0$$

найдется такое $\alpha \in \mathfrak{N}$, что $v_p = u_{i_p,\alpha}$.

Обсуждение физического и геометрического содержания введенного здесь понятия дается в [2], [7].

Рассмотрим случай физической структуры наименьшего возможного ранга (2,2).

Теорема. *Пусть тройка* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N},\ u : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to \mathbb{R})$ *образует физическую структуру ранга* (2,2). *Тогда многообразие* M *может быть представлено уравнением*

$$\Theta[\chi(u_{i\alpha})\chi(u_{k\beta}) - \chi(u_{i\beta})\chi(u_{k\alpha})] = 0$$

где χ *и* Θ *— строго монотонные функции.*

Доказательство. Положим $v_{i\alpha} = \partial\Phi/\partial u_{i\alpha}$. При канонических перестановках в $\mathbb{R}^4$ вектор $v = (v_{i\alpha}, v_{i\beta}, v_{k\alpha}, v_{k\beta})$, очевидно, также подвергается каноническим перестановкам. Если $v \neq 0$, то среди канонических перестановок v есть хоть одна, для которой отлична от нуля первая координата. Это означает, что для любых двух подмножеств $\{i, k\} = \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}$ и $\{\alpha, \beta\} = \mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{N}$ обозначения для элементов $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{N}_2$ можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}(u_{i\alpha}, u_{i\beta}, u_{k\alpha}, u_{k\beta}) \neq 0.$$

Фиксируем произвольно подмножества $\{i_0, ik_0\} = \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}$ и $\{\alpha_0\beta_0\} = \mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{N}$ так, чтобы в точке

$$u_0 = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (u_{i_0\alpha_0}, u_{i_0\beta_0}, u_{k_0\alpha_0}, u_{k_0\beta_0})$$

была отлична от нуля частная производная $(\partial\Phi/\partial u_1)(u_0)$. В силу сказанного это возможно. Ввиду того, что $(\partial\Phi/\partial u_1)(u_0) \neq 0$, найдутся числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что уравнение $\Phi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$ однозначно разрешимо в области

$$|u_1 - u_1{}^0| < \varepsilon, \quad |u_i - u_i{}^0| < \delta \quad (i = 2, 3, 4) \tag{10}$$

Решая (8) относительно u_1, получим $u_1 = f(u_2, u_3, u_4)$.

Рассмотрим частные производные $(\partial f/\partial u_2)(u_2, u_3, u_4)$, $(\partial f/\partial u_3)(u_2, u_3, u_4)$. Если $(\partial f/\partial u_2)(u_2, u_3, u_4)$ обращается в нуль на множестве положительной меры в области $|u_i - u_i{}^0| < \delta$ $(i = 2, 3, 4)$, то ввиду аналитичности $(\partial f/\partial u_2)(u_2, u_3, u_4) = 0$ для всех (u_2, u_3, u_4), откуда следует, что $u_1 = F(u_3, u_4)$. Это, однако, противоречит условию существенности параметров u_2 и u_3. Аналогично получаем, что частная производная $(\partial f/\partial u_3)(u_2, u_3, u_4)$ не может обращаться в нуль на множестве положительной меры.

В силу сказанного можно выбрать точки i_0, k_0, α_0, β_0 таким образом, чтобы производные $\partial f/\partial u_2$, $\partial f/\partial u_3$ были отличны от нуля для всех u_2, u_3, u_4, удовлетворяющих неравенствам (10). Для упрощения записи вместо k_0 и β_0 будем писать просто 0 и $\overline{0}$ соответственно.

Пусть x и ξ таковы, что

$$|x - u_2{}^0| < \delta, \quad |\xi - u_3{}^0| < \delta. \tag{11}$$

Положим $u = f(x, \xi, u_{0\overline{0}}) = \varphi(x, \xi)$.

Применяя условие Г), можно показать, что найдутся i и α такие, что

$$\varphi(x_1, \xi_1) = u_{i\alpha}, \quad \varphi(x_1, \xi_2) = u_{i\beta}, \quad \varphi(x_2, \xi_1) = u_{k\alpha}, \quad \varphi(x_2, \xi_2) = u_{k\beta}$$

Отсюда получаем функциональное уравнение

$$\Phi[\varphi(x, \xi), \varphi(x, \eta), \varphi(y, \xi), \varphi(y, \eta)] = 0,$$

где $x = x_1,\ y = x_2,\ \xi = \xi_1,\ \eta = \xi_2$.

Дифференцируя уравнение по $x,\ y,\ \xi,\ \eta,$ получим систему из четырех однородных линейных уравнений относительно неизвестных $\partial\Phi/\partial u_1$, $\partial\Phi/\partial u_2$, $\partial\Phi/\partial u_3$, $\partial\Phi/\partial u_4$. В силу условия А) хотя бы одна из величин $\partial\Phi/\partial u_i$ отлична от нуля и, значит, определитель системы равен нулю. Матрица коэффициентов рассматриваемой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} (\partial\varphi/\partial x)(x,\xi) & (\partial\varphi/\partial x)(x,\eta) & 0 & 0 \\ (\partial\varphi/\partial\xi)(x,\xi) & 0 & (\partial\varphi/\partial\xi)(y,\xi) & 0 \\ 0 & 0 & (\partial\varphi/\partial x)(y,\xi) & (\partial\varphi/\partial x)(y,\eta) \\ 0 & (\partial\varphi/\partial\xi)(x,\eta) & 0 & (\partial\varphi/\partial\xi)(y,\eta) \end{pmatrix}.$$

Приравнивая нулю определитель этой матрицы, получим

$$\begin{aligned} (\partial\varphi/\partial x)(x,\eta)(\partial\varphi/\partial x)(y,\xi)(\partial\varphi/\partial\xi)(x,\xi)(\partial\varphi/\partial\xi)(y,\eta) &\ - \\ - (\partial\varphi/\partial x)(x,\xi)(\partial\varphi/\partial x)(y,\eta)(\partial\varphi/\partial\xi)(y,\xi)(\partial\varphi/\partial\xi)(x,\eta) &\ = \ 0. \end{aligned}$$

Фиксируя y и η , данное равенство можно переписать в виде

$$A(x)B(\xi)(\partial\varphi/\partial\xi)(x,\xi) - C(x)D(\xi)(\partial\varphi/\partial x)(x,\xi) = 0. \tag{12}$$

Если $x,\ y,\ \xi,\ \eta$ таковы, что

$$|x - u_1{}^0| < \delta, \quad |y - u_2{}^0| < \delta, \quad |\xi - u_3{}^0| < \delta, \quad |\eta - u_4{}^0| < \delta,$$

то ни один из коэффициентов в (12) не обращается в нуль, оно может быть переписано в виде

$$P(\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x,\xi) - Q(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\xi) = 0. \tag{13}$$

Отсюда нетрудно заключить, что φ представимо в виде $\varphi(x,\xi) = \chi[R(x)S(\xi)]$, где $\chi,\ R$ и S — произвольные монотонные функции данной переменной.

Имеем $u_{i\alpha} = \varphi(x_i, \xi_\alpha) = \chi(R(x_i)S(\xi_\alpha))$, откуда $R(x_i)S(\xi_\alpha) = \chi^{-1}(u_{i\alpha})$. Выписывая аналогичные соотношения для $u_{i\beta},\ u_{k\alpha},\ u_{k\beta}$, получим, что эти величины связаны соотношением

$$\Psi(u_{i\alpha},\ u_{i\beta},\ u_{k\alpha},\ u_{k\beta}) = \chi^{-1}(u_{i\alpha})\chi^{-1}(u_{k\beta}) - \chi^{-1}(u_{i\beta})\chi^{-1}(u_{k\alpha}).$$

В силу аналитичности и связности M равенство (13) выполняется всюду на M . Теорема доказана.

§ 3. Ещё одно "функциональное" доказательство существования и единственности физической структуры ранга (2,2), принадлежащее Г.Г. Михайличенко [6]

Уравнение для физической структуры ранга $(2,2)$ конструируется по общей схеме [2]. Прямое произведение двух множеств $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots, l, \ldots\}$ и $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots, \gamma, \ldots\}$ однозначно отображается на множество действительных чисел, то есть каждому элементу $(i, \alpha) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляется некоторое число $a_{i\alpha}$

$$(i, \alpha) \to a_{i\alpha} \tag{14}$$

Будем говорить, что на двух множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ отображение (14) реализует физическую структуру ранга (2, 2), если существует такая вещественная функция четырёх переменных $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, что

$$\forall i, k \in \mathfrak{M}, \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{N} \Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = 0. \tag{15}$$

Предположим, что (15) однозначно разрешимо относительно хотя бы одного из четырёх аргументов, и функция Φ в (15) достаточное число раз дифференцируема. Соотношение (15) представляет собой функциональное уравнение специального вида для Φ . Это уравнение было решено, как мы уже отмечали, с использованием метода параметризации. Здесь мы применим второй из отмеченных во вступлении способов решения.

Выделим в множестве $\mathfrak{M}$ произвольное подмножество $\{i, k, l\}$, содержащее три элемента, и запишем (15) для любых двух элементов этого подмножества

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = 0,$$
$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{l\alpha}, a_{l\beta}) = 0,$$
$$\Phi(a_{k\alpha}, a_{k\beta}, a_{l\alpha}, a_{l\beta}) = 0.$$

Разрешим каждое из этих соотношений относительно третьего аргумента

$$a_{k\alpha} = f(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\beta}), \tag{16}$$

$$a_{l\alpha} = f(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{l\beta}), \tag{17}$$

$$a_{l\alpha} = f(a_{k\alpha}, a_{k\beta}, a_{l\beta}). \tag{18}$$

Подставим (16) в (18) и приравняем к (17)

$$f(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{l\beta}) = f[f(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\beta}), a_{k\beta}, a_{l\beta}]. \tag{19}$$

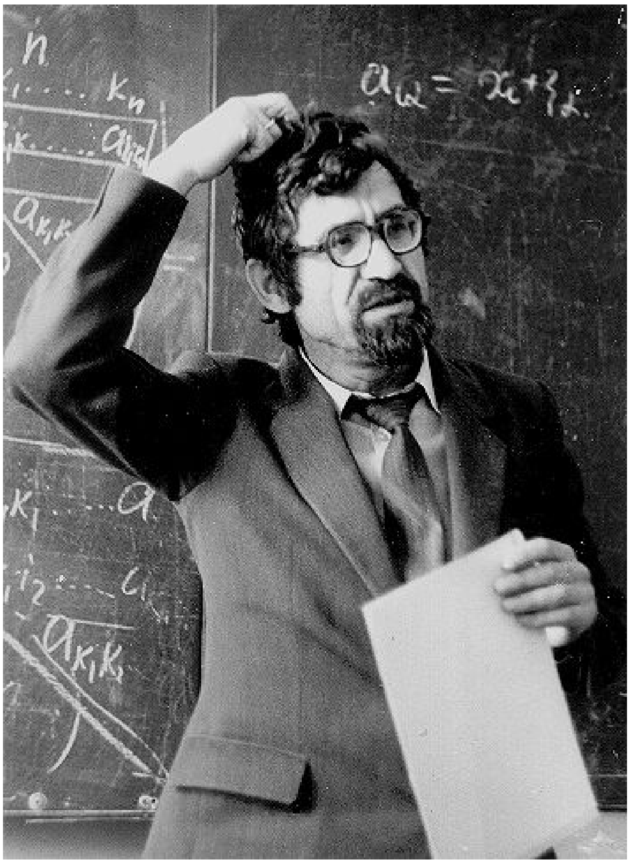
Соотношение (19) является тождеством. Переобозначим переменные в (19):

$$x = a_{i\alpha},\ y = a_{i\beta},\ z = a_{l\beta},\ s = a_{k\beta},$$

и имеем

$$f(x, y, z) = f[f(x, y, z), s, z]. \tag{20}$$

Таким образом, мы получили обычное функциональное уравнение, совпадающее с уравнением одномерного нестационарного движения [8].



Трудный вопрос

Ниже предлагается способ решения уравнения (20). Продифференцируем (20) отдельно по каждому из четырёх аргументов

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} &= \frac{\partial f[\ldots]}{\partial f(x,y,s)} \cdot \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial x},\\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} &= \frac{\partial f[\ldots]}{\partial f(x,y,s)} \cdot \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial y},\\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} &= \frac{\partial f[\ldots]}{\partial z},\\
0 &= \frac{\partial f[\ldots]}{\partial f(x,y,s)} \cdot \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial z} + \frac{\partial f[\ldots]}{\partial s}.
\end{aligned}$$

Выписанные четыре равенства можно рассматривать как систему четырёх линейных неоднородных уравнений относительно трёх неизвестных

$$\frac{\partial f[\ldots]}{\partial f(x,y,s)},\quad \frac{\partial f[\ldots]}{\partial z},\quad \frac{\partial f[\ldots]}{\partial s}.$$

Для совместности системы уравнений необходимо, чтобы определитель расширенной матрицы этой системы был равен нулю.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial s} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

или

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \cdot \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \cdot \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial x} = 0. \tag{21}$$

Положим в (21) $s = const$. Тогда имеем

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \cdot A(x,y) + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \cdot B(x,y) = 0. \tag{22}$$

(22) легко интегрируется методом характеристик

$$f(x,y,z) = \chi[\varphi(x,y), z]. \tag{23}$$

Подставим (23) в (16)

$$a_{k\alpha} = \chi[\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}), a_{k\beta}] \tag{24}$$

Разрешим (24) относительно $\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta})$ и запишем соотношения (16), (17), (18) в новом виде

$$\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}) + \psi(a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = 0,$$
$$\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}) + \psi(a_{l\alpha}, a_{l\beta}) = 0,$$
$$\varphi(a_{k\alpha}, a_{k\beta}) + \psi(a_{l\alpha}, a_{l\beta}) = 0,$$

откуда следует

$$\varphi(a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = -\psi(a_{k\alpha}, a_{k\beta}).$$

Таким образом, соотношение структуры (15) может быть представлено в виде

$$\psi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}) - \psi(a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = 0. \tag{25}$$

Аналогично, из справедливости условия (15) для любых двух элементов из подмножества $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathfrak{N}$ имеем другую возможную форму записи соотношения структуры (15)

$$\varphi(a_{i\alpha}, a_{k\alpha}) - \varphi(a_{i\beta}, a_{k\beta}) = 0. \tag{26}$$

Реализация двух возможных вариантов (25) и (26) налагает некоторые ограничения на функции двух переменных φ и ψ . Обозначим $x = a_{i\alpha}, y = a_{i\beta}, s = a_{k\alpha}, t = a_{k\beta}$. В новых обозначениях перепишем (25) и (26)

$$\psi(x,y) - \psi(s,t) = 0 \tag{27}$$

$$\varphi(x,s) - \varphi(y,t) = 0 \tag{28}$$

(27) и (28) задают в неявном виде, например, t как одну и ту же функцию переменных x, y, s

$$t = \chi_1[\psi(x, y), s] = \chi_2[\varphi(x, s), y]. \tag{29}$$

По переменным x, y, s (29) является тождеством. Продифференцируем (29) отдельно по x, y, s :

$$\frac{\partial\chi_1[\psi(x,y),s]}{\partial\psi(x,y)} \cdot \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial\chi_2[\varphi(x,s),y]}{\partial\varphi(x,s)} \cdot \frac{\partial\varphi(x,s)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\chi_1[\psi(x,y),s]}{\partial\psi(x,y)} \cdot \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\chi_2[\varphi(x,s),y]}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\chi_1[\psi(x,y),s]}{\partial s} = \frac{\partial\chi_2[\varphi(x,s),y]}{\partial\varphi(x,s)} \cdot \frac{\partial\varphi(x,s)}{\partial s}.$$

Рассмотрим эти три равенства как систему трёх линейных неоднородных уравнений относительно следующих двух неизвестных

$$\frac{\partial\chi_2[\varphi(x,s),y]}{\partial\varphi(x,s)}, \ \frac{\partial\chi_2[\varphi(x,s),y]}{\partial y}.$$

Для совместности уравнений необходимо, чтобы определитель расширенной матрицы системы был равен нулю

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\chi_1[\psi(x,y),s]}{\partial\psi(x,y)} \cdot \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial\varphi(x,s)}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial\chi_1[\psi(x,y),s]}{\partial\psi(x,y)} \cdot \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} & 0 & 1 \\ \frac{\partial\chi_1[\psi(x,y),s]}{\partial s} & \frac{\partial\psi(x,s)}{\partial s} & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{30}$$

Положим в (30) $x = a = const, \quad \psi(a, y) = u$

$$\psi_x(a, y) = A(u), \quad \frac{\varphi_x(a,s)}{\varphi_s(a,s)} = -B(s).$$

Раскрывая определитель (30), можем записать

$$\frac{\partial\chi_1(u,s)}{\partial u}A(u) + \frac{\partial\chi_1(u,s)}{\partial s}B(s) = 0.$$

Решение этого линейного уравнения может быть найдено методом характеристик

$$\chi_1(u, s) = \chi[\varphi(u) + \psi(s)] \tag{31}$$

Подставим (31) в (29) и введём некоторые переобозначения функций

$$t = \chi[\psi(x, y) + \psi(s)]$$

или

$$\psi(x, y) = \varphi(t) - \psi(s) \tag{32}$$

Из сравнения (27) и (32) следует

$$\psi(s,t) = -\psi(s) + \varphi(t)$$

и вместо (27) имеем

$$-\psi(x) + \varphi(y) + \psi(s) - \varphi(t) = 0. \tag{33}$$

Но, с другой стороны, (33) может быть записано в виде (28), то есть

$$\varphi(x,s) = -\psi(x) + \psi(s)$$

$$\varphi(y,t) = -\varphi(y) + \varphi(t)$$

откуда

$$\varphi(x) = \psi(x).$$

Таким образом, получаем окончательную формулу записи соотношенния структуры ранга (2,2)

$$\psi(a_{i\alpha}) - \psi(a_{i\beta}) - \psi(a_{k\alpha}) + \psi(a_{k\beta}) = 0. \tag{34}$$

(34) можно рассматривать как самое общее и единственное решение уравнения (15) бинарной физической структуры ранга (2,2). Обычная мультипликативная форма записи решения (34) получается при следующей замене функций

$$\psi(x) = ln\lambda(x)$$

$$ln\lambda(a_{i\alpha})\lambda(a_{k\beta}) - ln\lambda(a_{k\alpha})\lambda(a_{i\beta}) = 0$$

или

$$\lambda(a_{i\alpha}) \cdot \lambda(a_{k\beta}) - \lambda(a_{k\alpha}) \cdot \lambda(a_{i\beta}) = 0.$$

§ 4. Доказательство существования и единственности физической структуры ранга (3,2), принадлежащее Льву [4]

Пусть имеется два множества объектов $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ и $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$. И пусть дана функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$, которая каждой паре элементов сопоставляет вещественное число $f(i\alpha) \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим $\mathfrak{M}^3 = \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$. Построим функцию $F : \mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^2 \to \mathbb{R}^6$, которая каждому кортежу $< ijk, \alpha\beta > \in \mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^2$ сопоставляет шесть чисел $f(i\alpha), \ldots, f(k\beta)$, которые будем рассматривать как координаты точки пространства $\mathbb{R}^6$.

Потребуем выполнение следующих аксиом:

I. Множество $\mathfrak{M}$ является арифметическим пространством $\mathbb{R}^1$, а множество $\mathfrak{N}$ является арифметическим пространством $\mathbb{R}^2$.

Тогда каждый элемент из $\mathfrak{M}$ характеризуется одним параметром $(i) \to x_i$, а элемент из $\mathfrak{N}$ — двумя параметрами: $(\alpha) \to \xi_\alpha, h_\alpha$. Следовательно, двухточечная функция $f(i\alpha)$ будет иметь локальное координатное представление в виде:

$$f(i\alpha) = f(x_i; \xi_\alpha, h_\alpha).$$

II. Функция $f(x_i; \xi_\alpha, h_\alpha)$ — гладкая класса C^k (где k — достаточно большое) и существенным образом зависит от каждой группы координат (по Эйзенхарту [11]). То есть нельзя найти такую функцию $\varphi(\xi_\alpha, h_\alpha)$, чтобы имело место соотношение $f(x_i; \xi_\alpha, h_\alpha) = \Theta(x_i, \varphi(\xi_a, h_\alpha))$.

Производные функции $f(x_i; \xi_\alpha, h_\alpha)$ по каждому аргументу не равны нулю тождественно.

<u>Определение</u>. Будем говорить, что тройка $< \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, f >$ задает физическую структуру ранга (3,2), если кроме аксиом I, II выполняется следующая аксиома:
III. Для $\forall i, j, k \in \mathfrak{M}$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ существует такая достаточно гладкая функция $\Phi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, что $\operatorname{grad} \Phi \neq 0$ и выполняется соотношение:

$$\Phi[f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta)] = 0. \tag{35}$$

Задача состоит в том, чтобы найти явный вид функций f и Φ таких, чтобы для любых трех элементов из $\mathfrak{M}$ и для двух элементов из $\mathfrak{N}$ выполнялось соотношение (35). Продифференцируем соотношение (35) по всем семи параметрам x_i, x_j, x_k, ξ_α, h_α, ξ_β, h_β. Получим систему из семи уравнений относительно шести частных производных функции Φ по каждому своему аргументу. Матрица коэффициентов имеет вид:

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c}
f_{x_i}(i\alpha) & f_{x_i}(i\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & f_{x_j}(j\alpha) & f_{x_j}(j\beta) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & f_{x_k}(k\alpha) & f_{x_k}(k\beta) \\
f_{\xi_\alpha}(i\alpha) & 0 & f_{\xi_\alpha}(j\alpha) & 0 & f_{\xi_\alpha}(k\alpha) & 0 \\
f_{h_\alpha}(i\alpha) & 0 & f_{h_\alpha}(j\alpha) & 0 & f_{h_\alpha}(k\alpha) & 0 \\
\hline
0 & f_{\xi_\beta}(i\beta) & 0 & f_{\xi_\beta}(j\beta) & 0 & f_{\xi_\beta}(k\beta) \\
0 & f_{h_\beta}(i\beta) & 0 & f_{h_\beta}(j\beta) & 0 & f_{h_\beta}(k\beta)
\end{array} \right\| \tag{36}$$

где $f_{x_i}(i\alpha) = \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x_i}$, $f_{\xi_i}(i\alpha) = \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi_i}$ и т. д.

Так как $\operatorname{grad} \Phi \neq 0$ (аксиома III), то система имеет нетривиальное решение. Следовательно, ранг матрицы (36) меньше шести. Можно доказать, что определитель пятого порядка, отмеченный линией в матрице, не равен нулю (используя аксиому II). То есть ранг матрицы (36) равен пяти. По теории [7] все определители шестого порядка, окаймляющие не равный нулю определитель пятого порядка, равны нулю. Таких определителей будет два.

Раскрывая их по первому столбцу и фиксируя элементы i, j, k, получим систему из двух уравнений:

$$\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x_i}A_1(x_i)+\frac{f(i\alpha)}{\partial \xi_\alpha}B_1(\xi_\alpha,h_\alpha)+\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial h_\alpha}B_2(\xi_\alpha,h_\alpha)=0,$$

$$\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x_i}A_2(x_i)+\frac{f(i\alpha)}{\partial \xi_\alpha}B_3(\xi_\alpha,h_\alpha)+\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial h_\alpha}B_4(\xi_\alpha,h_\alpha)=0. \tag{37}$$

Можно доказать (используя аксиому II), что эти уравнения линейно независимы.

Решаем первое уравнение методом характеристик:

$$\frac{dx_i}{A_1(x_i)}=\frac{d\xi_\alpha}{B_1(\xi_\alpha,h_\alpha)}=\frac{dh_\alpha}{B_2(\xi_\alpha,h_\alpha)}.$$

Его интегралы: $\psi_2(\xi_\alpha,h_\alpha)=C_1$; $\varphi(x_i)-\psi_1(\xi_\alpha,h_\alpha)=C_2$. Делаем замену переменных:

$$\psi_2(\xi_\alpha,h_\alpha)=\rho_1;\quad \varphi(x_i)-\psi_1(\xi_\alpha,h_\alpha)=\rho_2;\quad x=\rho_0.$$

Тогда из первого уравнения $\partial f(i\alpha)/\partial\rho_0=0$, а второе уравнение примет вид:

$$\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \rho_1}[\psi_{2\xi_\alpha}B_3(\xi_\alpha,h_\alpha)+\psi_{2h_\alpha}B_4(\xi_\alpha,h_\alpha)]+\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \rho_2}[\varphi_{x_i}A_2(x_i)-(\psi_{1\xi_\alpha}B_3+\psi_{1h_\alpha}B_4)]=0.$$

Перейдем к переменным: $\varphi(x)=\overline{x}$; $\psi_1(\xi,h)=\overline{\xi}$; $\psi_2(\xi,h)=\overline{h}$:

$$\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \rho_1}R_1(\overline{\xi},\overline{h})+\frac{\partial(i\alpha)}{\partial \rho_2}[T(\overline{x})-R_2(\overline{\xi},\overline{h})]=0, \tag{38}$$

$$f(i\alpha)=f(\overline{h},\overline{x}-\overline{\xi})=f(\rho_1,\rho_2).$$

Из уравнения (38) находим:

$$T(\overline{x})\cdot\frac{1}{R_1(\overline{\xi},\overline{h})}-\frac{R_2}{R_1}(\overline{\xi},\overline{h})=-\frac{\partial f(\rho_1,\rho_2)}{\partial \rho_1}\Big/\frac{\partial f(\rho_1,\rho_2)}{\partial \rho_2}=\chi(\overline{x}-\overline{\xi},\overline{h}).$$

или

$$T(\overline{x})E_1(\overline{\xi},\overline{h})-E_2(\overline{\xi},\overline{h})=\chi(\underbrace{\overline{x}-\overline{\xi}}_{\rho_2},\underbrace{\overline{h}}_{\rho_1}).$$

Штрихи в дальнейшем опустим.

Продифференцируем полученное соотношение по x , затем его же — по ξ и сложим два полученных соотношения. Получим:

$$T_x(x)E_1(\xi,h)+T(x)E_{1\xi}(\xi,h)-E_{2\xi}(\xi,h)=0. \tag{39}$$

Фиксируя ξ, h , имеем:

$$T_x(x)=K_1T(x)+K_2. \tag{40}$$

Отметим, что K_1 и K_2 не равны одновременно нулю. Действительно, в противном случае $T(x) = \text{const} = C_1$ и из (38) находим:

$$C_1 E_1(\xi, h) - E_2(\xi, h) = M(h)M(\rho_1).$$

Уравнение (38) примет вид:

$$\frac{\partial f(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} + \frac{\partial f(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_2} M(\rho_1) = 0.$$

Его интеграл: $-\overline{M}(\rho_1) + \rho_2 = C$. То есть решение системы будет иметь вид: $f(i\alpha) = \Theta(\rho_2 - \overline{M}(\rho_1))$. Возвращаясь к старым переменным, получаем:

$$f(x_i, \xi_\alpha, h_\alpha) = \Theta(\varphi(x) - \psi_1(\xi, h) - \overline{M}(\xi, h)) = \Theta(\varphi(x) - \lambda(\xi, h)).$$

То есть функция $f(x, \xi, h)$ не существенным образом зависит от переменных ξ, h, что противоречит аксиоме II.

Итак, имеем: $T_x(x) = K_1 T(x) + K_2$, где K_1, K_2 не равны нулю одновременно. Подставляя это соотношение в (39), получим:

$$T(x)(K_1 + E_{1\xi}/E_1) + (K_2 - E_{2\xi}/E_1) = 0.$$

Если круглые скобки не равны нулю, то отсюда получим: $T(x) = \text{const}$, что приводит (как показано выше) к противоречию с аксиомой II. То есть,

$$E_{1\xi} = -K_1 E_1; \quad E_{2\xi} = K_2 E_1. \tag{41}$$

Возможны два случая: $K_1 \neq 0$; $K_1 = 0$.
Рассмотрим случай $\underline{K_1 \neq 0}$.
Тогда из (40), (41) находим:

$$T(x) = C_1 e^{K_1 x} - \frac{K_2}{K_1}; \quad E_1 = \mu_1(h) e^{-K_1 \xi}; \quad E_2 = \frac{-K_2}{K_1} e^{-K_1 \xi} \mu_1(h) + \mu_2(h).$$

$$T(x) E_1(\xi, h) - E_2(\xi, h) = C_1 \mu_1(h) e^{K_1(x-\xi)} - \mu_2(h) = \overline{\mu}_1(\rho_1) e^{K_1 \rho_2} - \mu_2(\rho_1).$$

Уравнение (38) запишется в виде:

$$\frac{\partial f(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_1} + \frac{\partial f(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_2} \left[\overline{\mu}_1(\rho_1) e^{K_1 \rho_2} - \mu_2(\rho_2)\right] = 0.$$

Уравнение характеристик:

$$\frac{d\rho_2}{\overline{\mu}_1(\rho_1) e^{K_1 \rho_2} - \mu_2(\rho_1)} = \frac{d\rho_1}{1}.$$

Введем новую переменную: $u = e^{-K_1 \rho_2}$. Тогда $du = -K_1 u d\rho_2$. Отсюда $d\rho_2 = -\frac{du}{K_1 u}$. Подставляя в уравнение характеристик, имеем:

$$\frac{du}{d\rho_1} \sigma_1(\rho_1) \cdot u + \sigma_2(\rho_1) \text{ — линейное уравнение.}$$

Его решение: $u = e^{\int \sigma_1(\rho_1)d\rho_1} + \left(\int \sigma_2(\rho_1)e^{-\int \sigma_1(\rho_1)d\rho_1}d\rho_1 + C\right)$. Отсюда интеграл всей системы равен:

$$C = ue^{-\int \sigma_1(\rho_1)d\rho_1} - \int \sigma_2(\rho_1)e^{-\int \sigma_1(\rho_1)d\rho_1}d\rho_1.$$

Возвращаясь к старым переменным, имеем:

$$C = e^{-K_1[\varphi(x)-\psi_1(\xi,h)]} \cdot \nu_1(\xi,h) - \nu_2(\xi,h) = \widetilde{x} \cdot \widetilde{\xi} + \widetilde{h}.$$

И решение имеет вид: $f(\widetilde{x},\widetilde{\xi},\widetilde{h}) = \chi(\widetilde{x} \cdot \widetilde{\xi} + \widetilde{h})$.

Рассмотрим случай $\underline{K_1 = 0 \quad (K_2 \neq 0)}$. Из (40), (41) находим: $T(x) = K_2x + K_3$, $E_1 = M_1(h)$, $E_2 = K_2\xi \cdot M_1(h) + M_2(h)$.

$$T(x)E_1(\xi,h) - E_2(\xi,h) = K_2\mu_1(h)\rho_2 - \mu_2(h).$$

Уравнение (38) запишется в виде:

$$\frac{\partial f(\rho_1,\rho_2)}{\partial \rho_1} + \frac{\partial f(\rho_1,\rho_2)}{\partial \rho_2}[\sigma_1(\rho_1) \cdot \rho_2 + \sigma_2(\rho_1)] = 0$$

Решая его получим:

$$\underline{f(x,\xi,h) = \chi(x \cdot \xi + h)},$$

то есть такое же решение, как и в случае $K_1 \neq 0$.

Итак, одна часть задачи решена: найден явный вид функции $f(x_i,\xi_\alpha,h_\alpha)$:

$$f(x_i,\xi_\alpha,h_\alpha) = \chi(x_i \cdot \xi_\alpha + h_\alpha), \tag{42}$$

где χ — произвольная монотонная функция. Найдем явный вид функции Φ. Удобно перейти от функции $f(i\alpha)$ к функции $\chi^{-1}(f(i\alpha)) = a_{i\alpha} = x_i \cdot \xi_\alpha + h_\alpha$. Будем искать функцию

$$\Phi(\underbrace{a_{i\alpha}}_{u_1}, \underbrace{a_{i\beta}, a_{j\alpha}, a_{j\beta}, a_{k\alpha}}_{\dots}, \underbrace{a_{k\beta}}_{u_6}) = 0, \tag{43}$$

для которой $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$.

Можно выписать все шесть функций $a_{i\alpha},\dots,a_{k\beta}$ в явном виде и, комбинируя их, освободиться от всех семи параметров $x_i,\dots,h_\beta$, найдя таким образом, связь между функциями $a_{i\alpha},\dots,a_{k\beta}$.

Можно найти эту связь и аналитически. Используя условие $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$, можно доказать, что все частные производные $\frac{\partial\Phi}{\partial u_1},\dots,\frac{\partial\Phi}{\partial u_6}$ не равны нулю. Продифференцируем (9) по ξ_α и по h_α:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}x_i + \frac{\partial\Phi}{\partial u_3}x_j + \frac{\partial\Phi}{\partial u_5}u_k = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial u_3} + \frac{\partial\Phi}{\partial u_5} = 0 \tag{44}$$

Умножая первое уравнение на ξ_α , второе — на h_α и сложим. Получим:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}a_{i\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}a_{j\alpha}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_5}a_{k\alpha}=0.$$

Умножая первое уравнение из (44) на ξ_β , второе —на h_β и складывая, получим:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}a_{i\beta}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}a_{j\beta}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_5}a_{k\beta}=0.$$

Выпишем второе уравнение из (44):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_5}=0$$

Имеем три уравнения относительно трех “неизвестных" $\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$ $\frac{\partial\Phi}{\partial u_5}$, не равных нулю. Следовательно, определитель, составленный из коэффициентов системы, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{j\alpha} & a_{k\alpha} \\ a_{i\beta} & a_{j\beta} & a_{k\beta} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Это и есть функция $\Phi(a_{i\alpha},\ldots,a_{k\beta})=0$. Задача решена полностью.

§ 5. Доказательство существования и единственности физической структуры ранга (4,2), принадлежащее Льву [4]

В теории физических структур, разрабатываемой Ю. И. Кулаковым и его учениками, исследуется вопрос о существовании и единственности физических структур, определенных на одном, двух и более множествах физических объектов [2], [5].

Задача о существовании физических структур на двух множествах полностью решена Г. Г. Михайличенко в его диссертации. Им же были исследованы физические структуры ранга $r=3$, $r=4$, определенные на одном множестве. При решении этих задач применялся разработанный им специальный функциональный метод. Но решить вопрос о существовании структур на одном множестве ранга $r>4$ функциональным методом не удавалось.

Для исследования физических структур на одном множестве ранга $r>4$ автором разработан общий параметрический метод, который является достаточно универсальным. С его помощью можно исследовать структуры, определенные на двух и более множествах [4]. Применение параметрического метода позволило внести интересные уточнения, связанные с единственностью решения для структур ранга (r,r) , определенных на двух множествах.

В данной работе этим методом исследуется физическая структура ранга $(4,2)$ и дается геометрическая интерпретация полученных результатов.

Приведем краткую постановку задачи. Пусть имеются два множества объектов $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ и $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$. Выберем из множества $\mathfrak{M}$ любые четыре элемента, а из $\mathfrak{N}$ — любые два элемента. Поставим в соответствие каждой паре элементов (по одному из каждого множества) (i, α) вещественное число $f(i\alpha)$. Всего таких чисел будет восемь.

Будем говорить, что элементы множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ находятся в отношении феноменологической симметрии (или существует физическая структура ранга $(4, 2)$), если имеет место зависимость:

$$\Phi[f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta), f(l\alpha), f(l\beta)] = 0 \tag{45}$$

для $\forall i, j, k, l \in \mathfrak{M}$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$. На множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ и функции f и Φ вводятся достаточно естественные ограничения.

1. Множеству $\mathfrak{M}$ соответствует многообразие размерности m; множеству $\mathfrak{N}$ соответствует многообразие размерности n.

В [10] и [9] показано, что содержательными задачи в теории физических структур являются те, для которых выполняются условия: $m = s - 1,\ n = r - 1$, где (r, s) и есть ранг физической структуры; т. е. в рассматриваемом случае $m = 1;\ n = 3$.

Таким образом, это требование означает, что каждый элемент множества $\mathfrak{M}$ характеризуется одним параметром $(i) \to x_i$, а элемент из $\mathfrak{N}$ — тремя параметрами $(\alpha) \to \xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha$. Двухточечная функция $f(i\alpha)$ имеет локальное координатное представление в виде:

$$f(i\alpha) = f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha).$$

2. Функция $f(i\alpha)$ — гладкая класса c^k (где k — достаточно большое) и существенным образом зависящая от своих координат (по Эйзенхарту [?, стр. 16]).

3. Функция Φ — достаточно гладкая, и $\mathrm{grad}\Phi \neq 0$. Рассмотрим соотношение (1). Продифференцируем его по всем десяти параметрам x_i, x_j, x_k, x_l, ξ_α, η_α, ζ_α, ξ_β, η_β, ζ_β. Получаем систему из десяти уравнений относительно восьми частных производных функции Φ по каждому аргументу. Матрица коэффициентов имеет следующий вид:

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c}
f_x(i\alpha) & f_x(i\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & f_x(j\alpha) & f_x(j\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & f_x(k\alpha) & f_x(k\beta) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_x(l\alpha) & f_x(l\beta) \\
f_\xi(i\alpha) & 0 & f_\xi(j\alpha) & 0 & f_\xi(k\alpha) & 0 & f_\xi(l\alpha) & 0 \\
f_\eta(i\alpha) & 0 & f_\eta(j\alpha) & 0 & f_\eta(k\alpha) & 0 & f_\eta(l\alpha) & 0 \\
f_\zeta(i\alpha) & 0 & f_\zeta(j\alpha) & 0 & f_\zeta(k\alpha) & 0 & f_\zeta(l\alpha) & 0 \\
\hline
0 & f_\xi(i\beta) & 0 & f_\xi(j\beta) & 0 & f_\xi(k\beta) & 0 & f_\xi(l\beta) \\
0 & f_\eta(i\beta) & 0 & f_\eta(j\beta) & 0 & f_\eta(k\beta) & 0 & f_\eta(l\beta) \\
0 & f_\zeta(i\beta) & 0 & f_\zeta(j\beta) & 0 & f_\zeta(k\beta) & 0 & f_\zeta(l\beta)
\end{array} \right\|, \tag{46}$$

где

$$f_x(i\alpha) = \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x_i}; \quad f_x(j\alpha) = \frac{\partial f(j\alpha)}{\partial x_j}; \quad f_\xi(i\alpha) = \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi_\alpha}; \quad f_\xi(i\beta) = \frac{\partial f(i\beta)}{\partial \xi_\beta}$$

и т. д..

Так как по третьей аксиоме в постановке задачи $\mathrm{grad}\phi \neq 0$, то система имеет нетривиальное решение. Следовательно, ранг матрицы (46) меньше восьми. Можно показать, что определитель седьмого порядка, отмеченный линией в (2) не равен нулю, т. е. ранг матрицы равен семи. Выпишем все три окаймляющие его определителя восьмого порядка, равные нулю. Раскрывая их по первому столбцу и фиксируя элементы i , k , α , β , получим систему из трех уравнений относительно функции $f(i\alpha)$:

$$\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x_i}B_\mu(i) + \frac{\partial f(j\alpha)}{\partial \xi_\alpha}C^1_\mu(\alpha) + \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \eta_\alpha}C^2_\mu(\alpha) + \frac{\partial f(i\beta)}{\partial \zeta_\alpha}C^3_\mu(\alpha) = 0, \tag{47}$$

где $\nu = 1,2,3;\quad B_\mu(i) = B_\mu(x_i)\quad C^1_\mu(\alpha) = C^1_\mu(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha)$ и т. д. Можно показать, что ранг системы равен трем, т. е. все уравнения линейно-независимы.

Решаем первое уравнение методом характеристик:

$$\frac{dx_i}{B_1(i)} = \frac{d\xi_\alpha}{C^1_1(\alpha)} = \frac{d\eta_\alpha}{C^2_1(\alpha)} = \frac{d\zeta_\alpha}{C^3_1(\alpha)}.$$

Его интегралы: $\psi_1(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha) = k_1$; $\psi_2(\alpha) = k_2$; $\varphi_1(i) - \psi_3(\alpha) = k_3$. Делаем замену переменных: $k_1 = y_1$; $k_2 = y_2$; $k_3 = y_3$; $x = y_0$. Тогда из первого уравнения $f_{y_0}(i\alpha) = 0$, а второе и третье уравнения системы (3) запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} &f_{y_3}[A_1(x_i) - R_3(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha)] + f_{y_1}R_1(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha) + f_{y_2}R_2(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha) = 0,\\ &f_{y_3}[A_2(x_i) - R_6(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha)] + f_{y_1}R_4(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha) + f_{y_2}R_5(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha) = 0,\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

где

$$f_{y_1} = \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial y_1};\quad f_{y_2} = \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial y_2};\quad f_{y_3} = \frac{\partial f(i\alpha)}{\partial y_3}.$$

Для удобства перейдем к переменным $\overline{x}_i = \varphi_1(i)$; $\overline{\xi}_\alpha = \psi_1(\alpha)$; $\overline{\eta}_\alpha = \psi_2(\alpha)$; $\overline{\zeta}_\alpha = \psi_3(\alpha)$. Тогда $f(i\alpha) = f(\overline{\xi}_\alpha,\overline{\eta}_\alpha,\overline{x}_i - \overline{\zeta}_\alpha)$. В дальнейшем штрихи и индексы у переменных опускаем.

Рассмотрим первое уравнение системы (48). Продифференцируем его по x , затем его же по ζ и сложим полученные соотношения. Получаем

$$f_{y_1}R_{1\zeta} + f_{y_2}R_{2\zeta} + f_{y_3}(A_{1x} - R_{3\zeta}) = 0. \tag{49}$$

Такую же процедуру проделаем и с полученным уравнением. Получаем:

$$f_{y_1}R_{1\zeta\zeta} + f_{y_2}R_{2\zeta\zeta} + f_{y_3}(A_{1xx} - R_{3\zeta\zeta}) = 0. \tag{50}$$

Полученные два соотношения вместе с первым уравнением системы (48) образуют систему уравнений относительно трех “неизвестных" f_{y_1} , f_{y_2} , f_{y_3} . Так как ни одно из неизвестных не равно нулю (по второй аксиоме в постановке задачи), то определитель, составленный из коэффициентов системы, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} R_1 & R_2 & A_1 - R_3\\ R_{1\zeta} & R_{2\zeta} & A_{1x} - R_{3\zeta}\\ R_{1\zeta\zeta} & R_{2\zeta\zeta} & A_{1xx} - R_{3\zeta\zeta}\end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем его по третьему столбцу:

$$A_1 \begin{vmatrix} R_{1\zeta} & R_{2\zeta} \\ R_{1\zeta\zeta} & R_{2\zeta\zeta} \end{vmatrix} - A_{1x} \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ R_{1\zeta\zeta} & R_{2\zeta\zeta} \end{vmatrix} + A_{1xx} \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ R_{1\zeta} & R_{2\zeta} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ R_{1\zeta} & R_{2\zeta} & R_{3\zeta} \\ R_{1\zeta\zeta} & R_{2\zeta\zeta} & R_{3\zeta\zeta} \end{vmatrix} = 0.$$

Фиксируя переменные $\xi,\ \eta,\ \zeta$, получаем

$$a_0 A_{1xx} + a_1 A_{1x} + a_2 A_1 = h_0 \tag{51}$$

Здесь возмозны два случая:

1) все коэффициенты равны нулю;
2) не все коэффициенты равны нулю.

Рассмотрим случай 1. Пусть $a_0 = a_1 = a_2 = h_0 = 0$.
Рассмотрим

$$a_0 = \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ R_{1\zeta} & R_{2\zeta} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда $\frac{R_{1\zeta}}{R_1} = \frac{R_{2\zeta}}{R_2}$. Решая, получаем: $R_2 = \Theta_1(\xi,\eta)R_1 = \Theta_1(y_1,y_2)R_1$. Подставляя значение R_2 в первое уравнение системы (4) и сокращая на R_1 , имеем:

$$f_{y_1} + f_{y_2}\Theta_1(y_1,y_2) + f_{y_3}\left(A_1\frac{1}{R_1} - \frac{R_3}{R_1}\right) = 0.$$

Отсюда

$$A_1\frac{1}{R_1} - \frac{R_3}{R_1} = \chi(\underbrace{\xi}_{y_1}, \underbrace{\eta}_{y_2}, \underbrace{x-\zeta}_{y_3}).$$

Это функциональное уравнение легко решается:

$$\chi = \Theta_2(y_1,y_2)\exp k_1 y_3 - \Theta_3(y_1,y_2).$$

Подставляя χ в первое уравнение, получаем:

$$f_{y_1} + f_{y_2}\Theta_1(y_1,y_2) + f_{y_3}[\Theta_2(y_1,y_2)\exp k_1 y_3 - \Theta_3(y_1,y_2)] = 0. \tag{52}$$

Рассмотрим случай 2. Не все коэффициенты $a_0,\ a_1,\ a_2,\ h_0$ равны нулю.

Умножим первое уравнение системы (48) на a_2 , (49) — на a_1 , (50) — на a_0 и сложим их. Учитывая (51), получаем:

$$f_{y_1}[a_2R_1 + a_1R_{1\zeta} + a_0R_{1\zeta\zeta}] + f_{y_2}[a_2R_2 + a_1R_{2\zeta} + a_0R_{2\zeta\zeta}] + f_{y_3}[h_0 - (a_2R_2 + a_1R_{3\zeta}a_0R_{3\zeta\zeta})] = 0.$$

Если не все скобки равны нулю, то производим деление, например, на скобку при f_{y_1} , получаем:

$$f_{y_1} + f_{y_2}\Phi_1(\xi,\eta,\zeta) + f_{y_3}\Phi_3(\xi,\eta,\zeta) = 0.$$

Можно показать, что такое уравнение ведет к потере существенного аргумента, что не допускается по аксиоме 2 в постановке задачи т. е. все скобки равны нулю, и окончательно имеем:

$$\left.\begin{array}{l} a_0A_{1xx}+a_1A_{1x}+a_2A_1=h_0; \quad a_0R_{1\zeta\zeta}+a_1R_{1\zeta}+a_2R_1=0; \\ a_0R_{3\zeta\zeta}+a_1R_{3\zeta}+a_2R_3=h_0; \quad a_0R_{2\zeta\zeta}+a_1R_{2\zeta}+a_2R_2=0. \end{array}\right\} \tag{53}$$

В общем случае можно считать, что ни один из коэффициентов a_0, a_1, a_2, h_0 не равен нулю. При равенстве нулю одного из коэффициентов получающиеся решения будут являться частными случаями общего решения. Пусть $\underline{\Delta = a_1^2-4a_2a_0 \neq 0}$. Из (53) находим:

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1\exp k_1x + C_2\exp k_2x + h_0/a_2; \\ R_1 &= \psi_1(\xi,\eta)\exp k_1\zeta + \psi_2(\xi,\eta)\exp k_2\zeta; \\ R_2 &= \psi_3(\xi,\eta)\exp k_1\zeta + \psi_4(\xi,\eta)\exp k_2\zeta; \\ R_3 &= \psi_5(\xi,\eta)\exp k_1\zeta + \psi_6(\xi,\eta)\exp k_2\zeta + h_0/a_2; \\ k_{1,2} &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2-4a_2a_0}}{2a_0}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в первое уравнение системы (48) и разделив его на $\exp k_2\zeta$, получаем:

$$\begin{aligned} &[f_{y_1}\psi_1 + f_{y_2}\psi_3 + f_{y_3}(C_1\exp k_1y_3 - \psi_5)]\exp(k_1-k_2)\zeta + \\ &\qquad + [f_{y_1}\psi_2 + f_{y_2}\psi_4 + f_{y_3}(C_2\exp k_2y_3 - \psi_6)] = 0. \end{aligned}$$

Так как $\Delta = a_1^2-4a_2a_0 = 0$, то $k_1 \neq k_2$ и можно показать, что выражения в квадратных скобках равны нулю. В результате получаем два уравнения, аналогичные уравнению (52).

Если $\underline{\Delta = a_1^2-4a_2a_0 = 0}$, то $k_1 = k_2$ и коэффициенты A_1, R_1, R_2, R_3 имеют следующий вид:

$$\begin{array}{rl} A_1 = (C_1x+C_2)\exp k_1x + H_0/a_2; & R_1 = (\psi_1\zeta+\psi_2)\exp k_1\zeta; \\ R_3 = (\psi_5\zeta+\psi_6)\exp k_1\zeta + h_0/a_2; & R_2 = (\psi_3\zeta+\psi_4)\exp k_1\zeta. \end{array}$$

Подставляя полученные выражения в первое уравнение системы (48) и разделив его на $\exp k_1\zeta$, получаем:

$$f_{y_3}C_1x\cdot\exp k_1y_3 + \zeta[f_{y_1}\psi_1 + f_{y_2}\psi_3 - f_{y_3}\psi_5] + [f_{y_1}\psi_2 + f_{y_2}\psi_4 - f_{y_3}\psi_6] = 0. \tag{54}$$

Продифференцируем это соотношение по x, затем его же по ζ и, сложив, получаем:

$$f_{y_1}\psi_1(y_1,y_2) + f_{y_2}\psi_3(y_1,y_2) + f_{y_3}[C_1\exp k_1y_3 - \psi_5(y_1,y_2)] = 0.$$

Подставляя его в (54), получаем:

$$f_{y_1}\psi_2(y_1,y_2) + f_{y_2}\psi_4(y_1,y_2) + f_{y_3}[(C_1y_3+C_2)\exp k_1y_3 - \psi_6(y_1,y_2)] = 0. \tag{55}$$

И, наконец, последний вариант: $\underline{k_1 = k_2 = 0}$. Перепишем уравнение, корнями которого являются k_1 и k_2: $a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0$. Если $k_1 = k_2 = 0$, то и $a_2 = 0$. Тогда $k(a_0k + a_1) = 0$. Отсюда $k_1 = 0$, $a_0k + a_1 = 0$. Если $a_0 = 0$, то возвращаясь к случаю I для уравнения (51). При $a_0 \neq 0$ имеем $k_2 = -a_1/a_0 = 0$, т. е. $a_1 = a_2 = 0$. Тогда $a_0A_{1xx} = h_0$; $R_{1\zeta\zeta} = 0$; $R_{2\zeta\zeta} = 0$; $a_0R_{3\zeta\zeta} = h_0$. Отсюда получаем:

$$A_1 = \frac{h_0}{2a_0}x^2 + C_1x + C_2; \qquad R_1 = \psi_1(\xi,\eta)\zeta + \psi_2(\xi,\eta);$$
$$R_2 = \psi_3(\xi,\eta)\zeta + \psi_4(\xi,\eta); \qquad R_3 = \frac{h_0}{2a_0}\zeta^2 + \psi_5(\xi,\eta)\zeta + \psi_6(\xi,\eta).$$

Подставляя полученные выражения в первое уравнение системы (48) получаем:

$$[f_{y_1}\psi_2+f_{y_2}\psi_4+f_{y_3}(C_2-\psi_6)]+\zeta[f_{y_1}\psi_1+f_{y_2}\psi_3-f_{y_3}\psi_5]+f_{y_3}\left[\frac{h_0}{2a_0}x^2 - C_1x - \frac{h_0}{2a_0}\zeta^2\right] = 0. \tag{56}$$

Дифференцируя (56) по x, затем его же по ζ и, складывая, получаем:

$$f_{y_1}\psi_1(y_1,y_2) + f_{y_2}\psi_3(y_1,y_2) + f_{y_3}\left[\frac{h_0}{a_0}y_3 + C_1 - \psi_5(y_1,y_2)\right] = 0$$

Используя полученное уравнение, из (56) получаем:

$$f_{y_1}\psi_2(y_1,y_2) + f_{y_2}\psi_4(y_1,y_2) + f_{y_3}\left[\frac{h_0}{2a_0}y_3 + C_1y_3 + C_2 - \psi_6(y_1,y_2)\right] = 0 \tag{57}$$

Таким образом, первое уравнение системы (48) исследовано полностью. Возможны три варианта: (52), (55), (57).

Аналогичным образом исследуются и второе уравнение системы (48); для него также имеем три варианта.

Исследуя все возможные комбинации для уравнений системы (48), приходим к двум возможным вариантам, приводящим к невырожденным решениям.

<u>Вариант 1:</u>

$$\left.\begin{aligned} f_{y_1}\psi_1(y_1,y_2) + f_{y_2}\psi_3(y_1,y_2) + f_{y_3}[\exp k_1y_3 - \psi_5(y_1,y_2)] = 0,\\ f_{y_1}\psi_2(y_1,y_2) + f_{y_2}\psi_4(y_1,y_2) + f_{y_3}[\exp k_2y_3 - \psi_6(y_1,y_2)] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

<u>Вариант 2:</u>

$$\left.\begin{aligned} f_{y_1}\psi_1(y_1,y_2) + f_{y_2}\psi_3(y_1,y_2) + f_{y_3}[C_1y_3 - \psi_5(y_1,y_2)] = 0,\\ f_{y_1}\psi_2(y_1,y_2) + f_{y_2}\psi_4(y_1,y_2) + f_{y_3}\left[\tfrac{C_1}{2}y_3^2 + y_3 - \psi_6(y_1,y_2)\right] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

<u>Рассмотрим вариант 1.</u>

Для упрощения введем переменные $\overline{y}_1 = \overline{y}_1(y_1,y_2)$ и $\overline{y}_2 = \overline{y}_2(y_1,y_2)$ такие, что $\overline{y}_{2y_1}\psi_1 + \overline{y}_{2y_2}\psi_2 = 0$; $\overline{y}_{1y_1}\psi_2 + \overline{y}_{1y_2}\psi_4 = 0$. В новых переменных система (58) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} f_{\overline{y}_1} + f_{y_3}[\overline{\psi}_1(\overline{y}_1,\overline{y}_2)\exp k_1y_3 - \overline{\psi}_5(\overline{y}_1,\overline{y}_2)] = 0,\\ f_{\overline{y}_2} + f_{y_3}[\overline{\psi}_2(\overline{y}_1,\overline{y}_2)\exp k_2y_3 - \overline{\psi}_6(\overline{y}_1,\overline{y}_2)] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

(Далее штрихи опускаем.)

Запишем систему в операторном виде: $X_\mu f(i\alpha)=0$, $\mu=1,2$. По теории [9. с. 61], если система дифференциальных уравнений в частных производных имеет решение, то оно должно удовлетворять также уравнениям:

$$(X_\mu X_\nu - X_\nu X_\mu)f(i\alpha)=[X_\mu,X_\nu]f(i\alpha)=0$$

Если систему $X_\mu f(i\alpha)=0$ записать в виде:

$$\sum_{k=1}^{3}\varphi^{\mu k}(y_1,y_2,y_3)\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial y_k}=0,$$

то $[X_\mu,X_\nu]f(i\alpha)=0$ запишутся в виде:

$$\sum_{\rho}^{3}\left\{\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi^{\nu\rho}}{\partial x_k}\varphi^{\nu\rho}-\frac{\partial\varphi^{\nu\rho}}{\partial y_k}\varphi^{\mu\rho}\right)\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial y_k}\right\}=0. \tag{61}$$

Составим уравнение (61) для системы (60) $(\mu,\nu=1,2)$. Получим следующее соотношение:

$$\begin{gathered}(\psi_1\psi_3)(y_1,y_2)(k_1-k_2)\exp(k_1+k_2)y_3+[\psi_{1y_2}-k_1(\psi_1\psi_4)(y_1,y_2)]\exp k_1y_3-\\ -[\psi_{3y_1}-k_2(\psi_2\psi_3)(y_1,y_2)]\exp k_2y_3+\psi_{4y_1}-\psi_{2y_2}=0.\end{gathered} \tag{62}$$

Если $k_1+k_2\neq 0$, то $\psi_1\psi_3=0$ (т. к. $k_1\neq k_2$). Но равенство нулю ψ_1 или ψ_3 приводит к потере существенного аргумента, что не допускается, т. е. $k_1+k_2=0$. Тогда из (62) имеем:

$$\left.\begin{aligned}\psi_{1y_2}-k_1\psi_1\psi_4=0;\quad \psi_{3y_1}-k_2\psi_2\psi_3=0;\\ 2k_1\psi_1\psi_3+\psi_{4y_1}-\psi_{2y_2}=0.\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Решаем первое уравнение системы (60) методом характеристик:

$$\frac{dy_1}{1}=\frac{dy_3}{\psi_1\exp k_1y_3-\psi_2}=\frac{dy_2}{0}.$$

Его интегралы: $y_2=\mathrm{const}$; $T_1(y_1,y_2)\exp(-k_1y_3)+T_2(y_1,y_2)=\mathrm{const}$. Делаем замену переменных: $y_2=\rho_1$; $T_1(y_1,y_2)\exp(-k_1y_3)+T_2(y_1,y_2)=\rho_2$.

Второе уравнение из (60) после замены:

$$f_{\rho_1}+f_{\rho_2}\{T_{1y_2}\exp(-k_1y_3)+T_{2y_2}+T_1(-k_1)[\psi_3\exp(-k_1y_3)-\psi_4]\exp(-k_1y_3)\}=0.$$

Коэффициент при f_{ρ_2}:

$$\begin{gathered}-k_1(T_1\psi_3)(y_1,y_2)\exp(-2k_1y_3)+(k_1T_1\psi_4+T_{1y_2})(y_1,y_2)\exp(-k_1y_3)+T_{2y_2}=\\ =\chi[\underbrace{y_2}_{\rho_1}:\underbrace{T_1(y_1,y_2)\exp(-k_1y_3)+T_2(y_1,y_2)}_{\rho_2}].\end{gathered} \tag{64}$$

Можно, используя явный вид T_1 и T_2 и условия (63), выразить коэффициент при f_{ρ_2} через переменные ρ_1 и ρ_2. Можно и непосредственно исследовать выражение (64). Продифференцируем (64) по $(\exp(-k_1 y_3))$:

$$2\exp(-k_1 y_3)(-k_1)T_1\psi_3 + k_1 T_1 \psi_4 + T_{1y_2} = \chi_{\rho_2} T_1$$

Поделим соотношение на T_1 $(T_1 \neq 0)$ и продифференцируем еще раз по $(\exp(-k_1 y_3))$:

$$-2k_1\psi_3 = \chi_{\rho_2\rho_2} T_1,$$

т. е. $\chi_{\rho_2\rho_2} = \Phi(y_1, y_2)$. Легко показать, что $\Phi(y_1, y_2) = \Phi(y_2) = \Phi(\rho_1)$. Тогда, интегрируя полученное соотношение, получим второе уравнение в виде:

$$f_{\rho_1} + f_{\rho_2}[\Phi_1(\rho_1)\rho_2^2 + \Phi_2(\rho_1)\rho_2 + \Phi_3(\rho_1)] = 0. \tag{65}$$

Уравнение характеристики имеет вод:

$$\frac{d\rho_2}{d\rho_1} = \Phi_1(\rho_1)\rho_2^2 + \Phi_2(\rho_1)\rho_2 + \Phi_3(\rho_1).$$

Это уравнение Рикатти.

Выберем какое-нибудь частное решение: $\overline{\rho}_2(\rho_1)$. Тогда общее решение [10 с. 47]:

$$\rho_2 = \overline{\rho}_2(\rho_1) + \frac{1}{GA_1(\rho_1) + A_2(\rho_1)}.$$

Отсюда

$$G = \frac{1 - A_2(\rho_1)\rho_2 + A_2(\rho_1)\varphi_1(\rho_1)}{A_1(\rho_1)\rho_2 - A_1(\rho_1)\varphi_1(\rho_1)}.$$

Возвращаясь к старым переменным, имеем:

$$G = \frac{\exp[-k_1(x-\zeta)]F_1(\xi,\eta,\zeta) + F_2(\xi,\eta,\zeta)}{\exp[-k_1(x-\zeta)]F_3(\xi,\eta,\zeta) + F_4(\xi,\eta,\zeta)}.$$

Сокращая на $F_3(\xi,\eta,\zeta)\exp k_1\zeta$, окончательно получаем интеграл системы (60) в виде:

$$G = \Psi(i\alpha) = \frac{\overline{x}_i\overline{\xi}_\alpha + \overline{\eta}_\alpha}{\overline{x}_i + \overline{\zeta}_\alpha} \tag{66}$$

Общее решение имеет вид: $f(i\alpha) = \chi[\Psi(i\alpha)]$, где ξ — строго монотонная функция.

Рассмотрим вариант 2 (система (59)).

Как и в варианте 1, вводим те же новые переменные $\overline{y}_1(y_1, y_2)$, $\overline{y}_2(y_1, y_2)$ и после упрощений получаем систему:

$$\left.\begin{array}{l} f_{\overline{y}_1} + f_{y_3}[C_1 y_3\overline{\psi}(\overline{y}_1,\overline{y}_2) + \overline{\psi}(\overline{y}_1,\overline{y}_2)] = 0 \\ f_{\overline{y}_1} + f_{y_3}\left[\left(\frac{C_1}{2}y_3^2 + y_3\right)\overline{\psi}_3(\overline{y}_1,\overline{y}_2) + \overline{\psi}_4(\overline{y}_1,\overline{y}_2)\right] = 0. \end{array}\right\} \tag{67}$$

Решаем первое уравнение (штрихи опускаем):

$$\frac{dy_3}{dy_1} = C_1\psi_1(y_1, y_2)y_3 + \psi_2(y_1, y_2); \qquad y_2 = \text{const}.$$

Это линейное уравнение. Его интеграл: $T_1(y_1, y_2)y_3 + T_2(y_1, y_2) = \text{const}$.

Производим замену переменных: $y_2 = \rho_1$; $T_1y_3 + T_2 = \rho_2$. Второе уравнение системы (67) после замены имеет вид:

$$f_{\rho_1} + f_{\rho_2}[\Phi_1(y_1, y_2)y_3^2 + \Phi_2(y_1, y_2)y_3 + \Phi_3(y_1, y_2)] = 0.$$

Как и в варианте 1, можно показать, что функции Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 зависят только от y_2 . И уравнение принимает вид:

$$f_{\rho_1} + f_{\rho_2}[\Phi_1(\rho_1)\rho_2^2 + \Phi_2(\rho_1)\rho_2 + \Phi_3(\rho_1)] = 0,$$

т. е. такой же, как и в варианте 1.

Итак, решение системы (48), соответствующей физической структуре ранга (4,2), имеет вид:

$$f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha) = \chi\left(\frac{x_i\xi_\alpha + \eta_\alpha}{x_i + \zeta_\alpha}\right), \tag{68}$$

где χ — строго монотонная функция одного аргумента.

В теории физических структур одним из важных вопросов является вопрос физической интерпретации полученных результатов. В работах Ю. И. Кулакова [2] и [7] было показано, что структура (2,2), например, связана с законом Ньютона, (3,2) — с электродинамикой постоянных токов и т. д. В работах Г. Г. Михайличенко [8] и автора [3], [4] показано, что физическая структура ранга $r = 4$ описывает все возможные двумерные геометрии, $r = 5$ — трехмерные и т. д.

Как же можно интерпретировать результат (68) для физической структуры (4,2)? Напомним одно замечательное свойство частных решений уравнения Рикатти: ангармоническое отношение любых четырех частных решений уравнения Рикатти равно постоянному [?, стр. 50]. Таким образом, если уравнение Рикати записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x),$$

а частные решения обозначить y_1 , y_2 , y_3 , y_4 , то

$$\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = G, \text{ где } G = \text{const}.$$

Хорошо известно, что ангармоническое отношение (или сложное отношение) есть инвариант проективных отображений. Это отношение, позволяющее охарактеризовать проективную эквивалентность, “является основным инвариантом проективной геометрии, подобно тому, как расстояние между точками, характеризующее конгруэнтность, есть основной инвариант элементарной геометрии" [12].

Таким образом, видно, что структура (4,2) связана с проективной геометрией.

В своей диссертации Г. Г. Михайличенко [13] нашёл решение (68) и указал явный вид функции Φ, связывающей все восемь функций $f(i\alpha),\dots,f(l\beta)$:

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\alpha)f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\alpha)f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\alpha)f(k\beta) & 1 \\ f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\alpha)f(l\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{69}$$

Интересно, что точно такой же определитель (в других обозначениях) приведен в “шестом мемуаре о формах" А. Кэли как условие проективного соответствия двух четверок точек [**?**, стр. 278].

Определитель (69) можно преобразовать следующим образом. Прибавим к (24) два определителя 4-го порядка, равные нулю, у которых 1,2,4 столбцы совпадают с 1,2,4 столбцами в (69), третий столбец в первом определителе есть первый из (24), умноженный на $(-f(l\beta))$, и третий столбец во втором есть второй из (69), умноженный на $(-f(l\alpha))$. Складывая определители, получаем:

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & [f(i\alpha)f(i\beta)-f(l\alpha)f(i\alpha)-f(l\alpha)f(i\beta)] & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & [f(j\alpha)f(j\beta)-f(l\alpha)f(j\alpha)-f(l\alpha)f(j\beta)] & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & [f(k\alpha)f(k\beta)-f(l\alpha)f(k\alpha)-f(l\alpha)f(k\beta)] & 1 \\ f(l\alpha) & f(l\beta) & [f(l\alpha)f(l\beta)-f(l\alpha)f(l\alpha)-f(l\alpha)f(l\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычтем последнюю строчку из первых трех. Разлагая по последнему столбцу и группируя члены, получаем:

$$\begin{vmatrix} [f(i\alpha)-f(l\alpha)] & [f(i\beta)-f(l\beta)] & [f(i\alpha)-f(l\alpha)][f(i\beta)-f(l\beta)] \\ [f(j\alpha)-f(l\alpha)] & [f(j\beta)-f(l\beta)] & [f(j\alpha)-f(l\alpha)][f(j\beta)-f(l\beta)] \\ [f(k\alpha)-f(l\alpha)] & [f(k\beta)-f(l\beta)] & [f(k\alpha)-f(l\alpha)][f(k\beta)-f(l\beta)] \end{vmatrix} = 0.$$

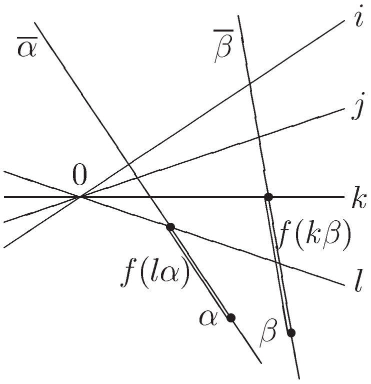
Разделим на произведение скобок в каждой строчке:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{[f(i\beta)-f(l\beta)]} & \frac{1}{[f(i\alpha)-f(l\alpha)]} & 1 \\ \frac{1}{[f(j\beta)-f(l\beta)]} & \frac{1}{[f(j\alpha)-f(l\alpha)]} & 1 \\ \frac{1}{[f(k\beta)-f(l\beta)]} & \frac{1}{[f(k\alpha)-f(l\alpha)]} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычитая третью строчку из первой и второй и преобразуя полученное соотношение, окончательно получаем:

$$\frac{f(k\alpha)-f(i\alpha)}{f(k\alpha)-f(j\alpha)} : \frac{f(l\alpha)-f(i\alpha)}{f(l\alpha)-f(j\alpha)} = \frac{f(k\beta)-f(i\beta)}{f(k\beta)-f(j\beta)} : \frac{f(l\beta)-f(i\beta)}{f(l\beta)-f(j\beta)}. \tag{70}$$

Как видно, левая и правая части равенства не зависят от α и от β.



Геометрическая интерпретация решения для физической ранга (4,2) может быть следующей. Пусть элементами множества $\mathfrak{M}$ являются всевозможные прямые из плоского пучка прямых с центром 0, а элементами множества $\mathfrak{N}$ являются любые другие прямые этой плоскости, пересекающие прямые пучка. Выберем их $\mathfrak{M}$ любые четыре прямые из пучка i, j, k, l, а из $\mathfrak{N}$ — любые две прямые, пересекающие их, $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$. Введем на прямых $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ проективные системы координат [14, стр. 278], т. е. определим начало системы координат: на прямой $\overline{\alpha} - \alpha$, на прямой $\overline{\beta} - \beta$. Обозначим расстояния от начала координат до точек пересечения прямых i, j, k, l с прямыми $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ соответственно через $f(i\alpha), \ldots, f(l\alpha), f(i\beta), \ldots, f(l\beta)$. Тогда для любых четырех прямых из пучка и любых двух их пересекающих прямых выполняется соотношение (70), которое и определяет инвариантность сложного отношения для четырех элементов из множества $\mathfrak{M}$.

Участники Всесоюзной школы-семинара по Теории физических структур в Пущино-на-Оке

Литература к главе 14

[1] *Н. Бердяев* Самосознание. М.: Мысль, 1990. С. 293.

[2] *Кулаков Ю.И.* Элементы теории физических структур. /Дополнение Г.Г.Михайличенко. Новосибирск. Изд-во Новосибирского университета, 1968. 228 с.

[3] *Лев В.Х.* Бинарная физическая структура ранга (3,3). //Структурный анализ символьных последовательностей. Выпуск 101. Вычислительные системы. - Новосибирск.: Институт математики СОАН СССР, 1984. С. 91 - 113.

[4] *Лев В.Х.* Двумерные и трёхмерные геометрии в теории физических структур // Машинный анализ сложных структур. Выпуск 118. Вычислительные системы. – Новосибирск. Институт математики СОАН СССР, 1986, С. 28-36.

[5] *Лев В.Х.* Трёхмерные геометрии в теории физических структур // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Выпуск 125. – Новосибирск. Институт математики СОАН СССР, 1988, С. 90-103.

[6] *Михайличенко Г.Г.* Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур. С. 175–226. // Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур. (Дополнение Г.Г.Михайличенко). Новосибирск. Изд.-во НГУ, 1968. 226 с.

[7] *Кулаков Ю. И.* О новом виде симметрии, лежащей в основании теории феноменологического типа // Докл. АН СССР. — 1971. Т. 201, № **3**. с. 570–572.

[8] *Михайличенко Г. Г.* Двумерные геометрии // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 260, № **4**. с. 803–805.

[9] *Михайличенко Г. Г.* Методы решения некоторых уравнений теории физических структур // Вопросы теории и методики преподавания физики. (Научные труды. Вып. 71) — Новосибирск, 1971. с. 3–12.

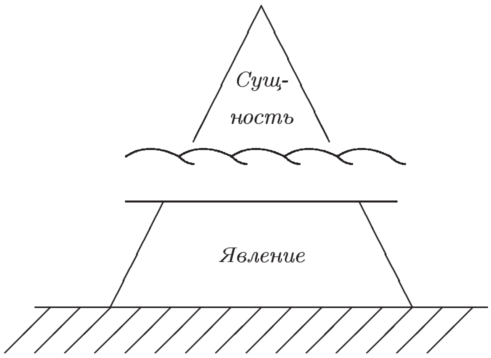
[10] *Кулаков Ю. И.* О теории физических структур // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. — Л.: Наука, 1983. — Т. 127, вып. № **15**. с. 103–151. (Зап. научного семинара ЛОМИ.)

[11] *Эйзенхарт Л. П.*, Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ, 1947. — 40с.

[12] *Кэли А.* Шестой мемуар о формах // Об основаниях геометрии: Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитие ее идей. — М.: ГИТТЛ, 1956. — с. 222–252.

[13] *Михайличенко Г. Г.* Решение некоторых функциональных уравнений, связанных с понятием физического закона: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 и 01.04.02. — Новосибирск, 1973. — 13 с.

[14] *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия. — М.: Наука, 1971. — 576 с.



Отсюда, начиная с Галилея, началось победоносное шествие экспериментальной физики.